

# ANÁLISE MATEMÁTICA E PROJETO DO ROTOR DE UM MOTOR SÍNCRONO A RELUTÂNCIA

Josemar A. Santos Jr<sup>1,2</sup>, Darizon A. Andrade<sup>1</sup>, Ghunter P. Viajante<sup>2</sup>, Marcos A. A. Freitas<sup>2</sup>, Giovani A. Lourenço<sup>1,2</sup>, Wanberton G. de Souza<sup>1</sup>, Marcos J. M. Filho<sup>1</sup>, Cássio X. Rocha<sup>1,2</sup>.

<sup>1</sup>Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Elétrica – Lab. De Acionamentos Elétricos, Uberlândia – MG, josemarjr@gmail.com.

<sup>2</sup>Instituto Federal de Goiás – Departamento de áreas acadêmicas – Núcleo de Pesquisa em Sistemas Elétricos, Itumbiara – GO, josemar.junior@ifg.edu.br.

**Resumo** - Este trabalho apresenta as equações de estado para um motor de 4 polos (2 cv) trifásico, considerando a modelagem d/q para análise. É apresentado também o desenvolvimento e análise do rotor de um motor síncrono a relutância com o uso de um software baseado em elementos finitos.

**Palavras-Chave** - Motor síncrono a relutância, Projeto de rotor síncrono a relutância, Simulação computacional.

## MATHEMATICAL ANALYSIS AND SYNCHRONOUS RELUCTANCE MOTOR ROTOR DESIGN

**Abstract** - This paper presents the state equations for a motor 4 poles (2 hp) three-phase, considering the modeling d/q analysis. Also shown is rotor development and analysis of a synchronous reluctance motor using a finite element software based.

**Keywords** - Synchronous reluctance motor, Synchronous reluctance motor design, Computer simulation.

### I. INTRODUÇÃO

Com a crescente demanda industrial por motores de baixo custo de operação e maior eficiência, e graças ao avanço da tecnologia e o crescente desenvolvimento da eletrônica de potência, conversores e técnicas de controle, tem-se o motor síncrono a relutância como uma opção eficiente e de baixo custo (comparado a motores síncronos de ímã permanente) para acionamentos de máquinas, dentre outras aplicações industriais.

Sendo o estator idêntico ao do motor de indução, a diferença está na construção do rotor, que não requer excitação (sem enrolamentos ou ímã permanente), e opera de forma semelhante ao motor de polos salientes.

O rotor é constituído de lâminas de aço ferro magnético finas empilhadas ao longo do eixo, com ranhuras (furos/barreiras de fluxo) com a função de definir o fluxo magnético em torno do rotor. A Fig. 01 apresenta um rotor com as regiões que facilitam (eixo direto) e os cortes (barreiras de fluxo) que dificultam a passagem do fluxo magnético (eixo em quadratura) para um motor sem gaiola de partida (gaiola de esquilo).

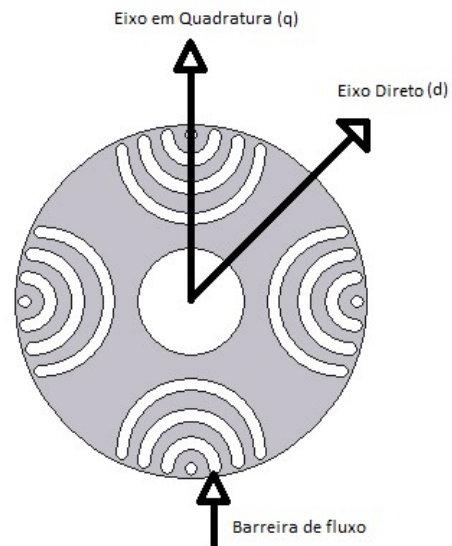


Fig. 01 – Exemplo de rotor para motor síncrono a relutância.

A dimensão das barreiras de fluxo, raio de curvatura e a distância entre as barreiras são os fatores que influenciam diretamente o valor das indutâncias diretas e de quadratura do rotor.

Esse tipo de motor é acionado com o auxílio de controlador eletrônico (conversores de frequência) quando não apresenta gaiola de partida (gaiola de esquilo) e pelo fato de ser síncrono é indicado para aplicações que necessitem de velocidade constante com carga variável

### II. MODELO DA MÁQUINA NO SISTEMA D-Q

#### A. Análise Estática

Diversos estudos de motores síncronos a relutância apresentam o torque eletromagnético ( $T_{em}$ ) tem relação entre indutância direta ( $L_d$ ) e indutância de quadratura ( $L_q$ ) do rotor [1]:

$$T_{em} = p \cdot (L_d - L_q) \cdot I_{sd} \cdot I_{sq} \quad (1)$$

onde  $p$  é o número de pares de polos,  $I_{sd}$  e  $I_{sq}$  são as correntes de estator com referencial no rotor em relação ao eixo d e q, respectivamente,  $L_d$  e  $L_q$  representam as indutâncias do estator nos eixos d e q, respectivamente.

O módulo da corrente de estator ( $I_s$ ) é dada por (3) e sua representação fasorial ilustrada na Fig. 02.

$$I_s = \sqrt{I_{sd}^2 + I_{sq}^2} \quad (3)$$

onde  $I_{sd}$  e  $I_{sq}$  são respectivamente, a corrente direta e a corrente de quadratura do estator e  $\varepsilon$  é o ângulo que identifica a posição do fasor de corrente do estator ( $I_s$ ) em relação ao eixo de regime permanente.

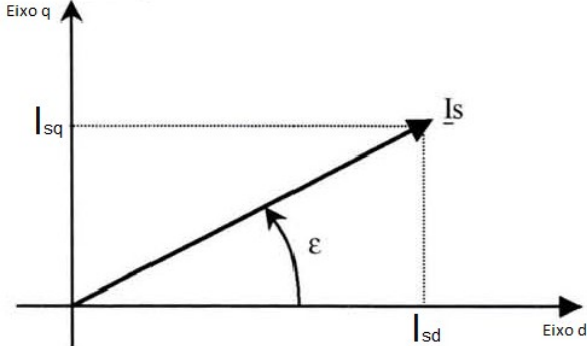


Fig. 02 – Posição da corrente do estator no referencial d/q.

O fator de potência ( $\cos \varphi$ ) do motor, que corresponde ao deslocamento de fase entre a corrente de linha e a fase da tensão fundamental correspondente está diretamente relacionada a relação entre  $L_d/L_q$ , também chamado de fator de saliência ( $k$ ), e definida como sendo [1] e [2]:

$$\cos \varphi = \frac{\left(\frac{L_d}{L_q} - 1\right) \cdot \text{sen} \varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{L_d}{L_q}\right)^2 + \tan^2 \varepsilon}} \quad (2)$$

Para o fator de potência máximo ( $\cos \varphi_{\max}$ ), o valor determinante é somente o fator de saliência ( $L_d/L_q$ ), conforme apresentado pela equação abaixo [1]:

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{\frac{L_d}{L_q} - 1}{\frac{L_d}{L_q} + 1} \quad (3)$$

Para uma faixa de fator de saliência, é possível se determinar o fator de potência máximo para o motor síncrono a relutância conforme apresentado na Fig. 3, para  $k$  com valores entre 0 e 10.

Observa-se na Fig. 03 que acima de 8 para o fator de saliência, o fator de potência está acima de 0,8 e a medida que este valor aumenta, mais próximo da unidade o fator de potência se aproxima. Porém para motores de baixa potência, fatores de saliência acima de 10 são difíceis de serem obtidos devido a dimensão do rotor, que com diâmetros pequenos, dificultam a colocação de muitas barreiras de fluxo.

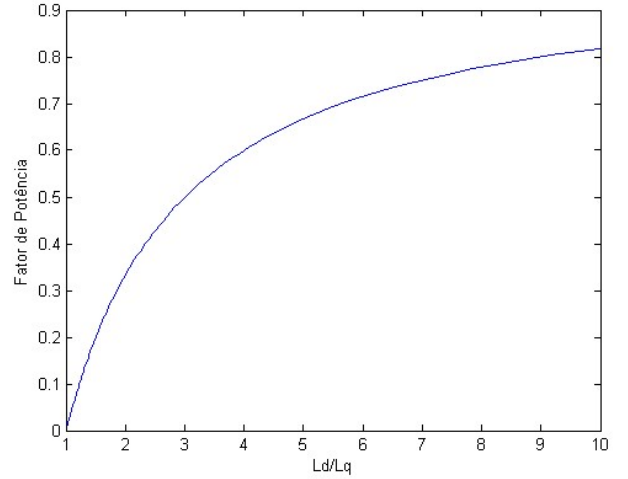


Fig. 03 – Fator de potência em função da relação de saliência ( $L_d/L_q$ ).

## B. Análise Dinâmica

Tem-se na Fig. 04 o modelo elétrico equivalente do motor no sistema com referencial no rotor. No qual, tem-se um modelo simplificado de uma máquina representada por dois circuitos elétricos acoplados, um no eixo direto  $d$  e o outro no eixo em quadratura  $q$ .

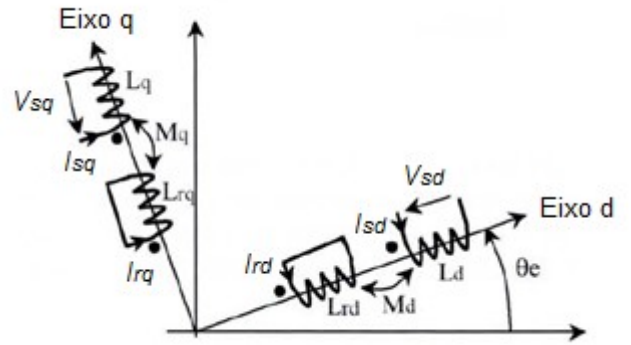


Fig. 04 – Representação do motor síncrono a relutância

Na Fig. 4, tem-se  $V_{sd}$  e  $V_{sq}$ , como sendo a tensão no estator para os eixos  $d$  e  $q$ , respectivamente.  $I_{rd}$  e  $I_{rq}$ , são as correntes do rotor para os eixos  $d$  e  $q$ , respectivamente.  $L_{rd}$  e  $L_{rq}$  são as indutâncias do rotor para os eixos  $d$  e  $q$ , respectivamente, e  $M_d$  e  $M_q$  representam as indutâncias mútuas nos eixos  $d$  e  $q$ , respectivamente.

As equações equivalentes das tensões nos terminais dos enrolamentos do estator nos eixos  $d$  e  $q$  podem ser descritas por:

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s \cdot I_{sd} + \frac{d\Psi_{sd}}{dt} - \omega_e \cdot \Psi_{sq} \\ V_{sq} &= R_s \cdot I_{sq} + \frac{d\Psi_{sq}}{dt} + \omega_e \cdot \Psi_{sd} \end{aligned} \quad (4)$$

A relação dos fluxos totais nos enrolamentos do estator nos eixos seguem as equações [5]:

$$\begin{aligned} \Psi_{sd} &= L_d \cdot I_{sd} + M_d \cdot I_{rd} \\ \Psi_{sq} &= L_q \cdot I_{sq} + M_q \cdot I_{rq} \end{aligned} \quad (5)$$

Desta mesma forma, descreve-se as equações das tensões no rotor (enrolamentos em curto):

$$0 = R_{rd} \cdot I_{rd} + \frac{d\Psi_{rd}}{dt} \quad (6)$$

$$0 = R_{rq} \cdot I_{rq} + \frac{d\Psi_{rq}}{dt}$$

Onde os fluxos totais no rotor podem ser dados por:

$$\Psi_{rd} = L_{rd} \cdot I_{rd} + M_d \cdot I_{sd} \quad (7)$$

$$\Psi_{rq} = L_{rq} \cdot I_{rq} + M_q \cdot I_{sq}$$

A expressão do torque eletromagnético desenvolvido pela máquina é [3] e [5]:

$$T_{em} = p \cdot (\Psi_{sd} \cdot I_{sq} - \Psi_{sq} \cdot I_{sd}) \quad (8)$$

O torque eletromagnético está diretamente associado com a relação dinâmica fundamental dos sistemas rotativos (8). Onde,  $\omega$  é a velocidade de rotação do rotor,  $J$  é o momento de inércia do sistema e  $f$  o coeficiente de atrito viscoso. Tem  $T_{em}$  o torque eletromagnético e  $T_r$  o torque de carga [5].

$$J \frac{d\omega}{dt} + f \cdot \omega = T_{em} - T_r \quad (9)$$

O modelo de fluxos de indutâncias separadas apresenta parâmetros elétricos de difícil obtenção, como por exemplo, a impossibilidade de medir os parâmetros específicos do rotor separadamente ( $L_{rd}$ ,  $L_{rq}$ ,  $R_{rd}$ ,  $R_{rq}$ , onde  $L_r$  e  $R_r$  são a indutância e resistência do rotor para cada eixo, respectivamente), assim como as indutâncias mútuas  $M_d$  e  $M_q$ , que mudam de acordo com as correntes de magnetização e não estão acessíveis à medição.

Várias maneiras de se minimizar erros provocados pela dificuldade de mensuração das variáveis, causados pela falta ou inexatidão destes parâmetros são propostas na literatura, que vão de softwares utilizando elementos finitos para calcular estes elementos (valores) [3], até soluções com valores medidos de fluxos totais e verificar a equivalência entre os fluxos no estator e no rotor [4]. Uma solução que adotamos para obtenção mais confiável dos valores de fluxos foi proposto em [2], cujo modelo apresenta acessível apenas os parâmetros elétricos mensuráveis nos enrolamentos do estator.

Neste modelo, utiliza-se também os termos  $\sigma_d$  e  $\sigma_q$ , que representam os coeficientes de dispersão de Blondel para os eixos  $d$  e  $q$ :

$$\sigma_d = 1 - \frac{M_d^2}{L_d \cdot L_{rd}} \quad (10)$$

$$\sigma_q = 1 - \frac{M_q^2}{L_q \cdot L_{rq}}$$

Que são aplicados ao modelo de estado do motor síncrono a relutância, para obtenção do fluxo magnético do estator, conforme apresentado em (11).

$$\frac{d\Psi_{sd}}{dt} = -\frac{R_s}{\sigma_d \cdot L_d} \cdot \Psi_{sd} + \omega_e \cdot \Psi_{sq} + \frac{R_s}{\sigma_d \cdot L_d} \cdot \Psi_{msd} + v_{sd} \quad (11)$$

$$\frac{d\Psi_{sq}}{dt} = -\omega_e \cdot \Psi_{sd} - \frac{R_s}{\sigma_q \cdot L_q} \cdot \Psi_{sq} + \frac{R_s}{\sigma_q \cdot L_q} \cdot \Psi_{msq} + v_{sq}$$

Onde os valores mútuos dos fluxos no estator para cada eixo são obtidos em (12):

$$\frac{d\Psi_{msd}}{dt} = \frac{1 - \sigma_d}{\sigma_d \cdot T_D} \cdot \Psi_{sd} - \left( \frac{1}{\sigma_d \cdot T_D} \right) \cdot \Psi_{msd} \quad (12)$$

$$\frac{d\Psi_{msq}}{dt} = \frac{1 - \sigma_q}{\sigma_q \cdot T_Q} \cdot \Psi_{sq} - \left( \frac{1}{\sigma_q \cdot T_Q} \right) \cdot \Psi_{msq}$$

Com os valores mútuos dos fluxos é possível a obtenção dos valores das correntes no estator para cada eixo:

$$I_{sd} = \frac{1}{\sigma_d \cdot L_d} \cdot (\Psi_{sd} - \Psi_{msd}) \quad (13)$$

$$I_{sq} = \frac{1}{\sigma_q \cdot L_q} \cdot (\Psi_{sq} - \Psi_{msq})$$

### III. PROJETO E DESENVOLVIMENTO DO ROTOR

No desenvolvimento do rotor, leva-se em conta a largura das ranhuras (barreiras de fluxo), quantidade de barreiras e espaçamento entre as mesmas. Estes valores são responsáveis pelos principais parâmetros do MSR, que são as indutâncias diretas ( $L_d$ ) e quadratura ( $L_q$ ) responsáveis pelos valores de conjugado e fator de potência, conforme apresentado anteriormente.

#### A. Modelos de rotores desenvolvidos

Para a otimização do projeto, utilizou-se um *software* de elementos finitos capaz de alocar as barreiras de fluxo de acordo com os parâmetros desejados e apresentar o caminho de fluxo e a distribuição do campo magnético para cada projeto.

Utilizou-se 3 formas geométricas diferentes para análise com 3 barreiras de fluxo por polo, utilizando o rotor axialmente laminado.

A Fig. 05 apresenta o primeiro modelo com 3 barreiras de fluxo com e sem ponte (divisão) entre as barreiras.

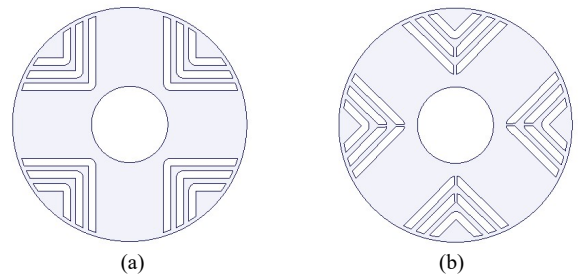


Fig. 05 – Primeiro modelo de rotor com 3 barreiras de fluxo (a) sem ponte e (b) com ponte.

A Fig. 06 apresenta o segundo modelo com 3 barreiras de fluxo com e sem ponte entre as barreiras.

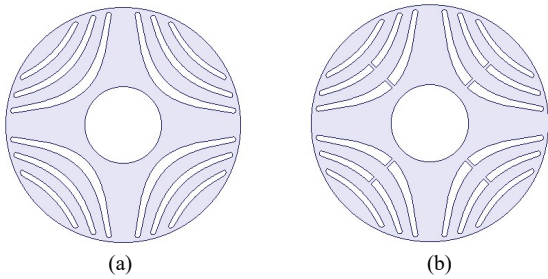


Fig. 06 – Segundo modelo de rotor com 3 barreiras de fluxo (a) sem ponte e (b) com ponte.

A Fig. 07 apresenta o terceiro modelo com 4 barreiras de fluxo com e sem ponte entre as barreiras.

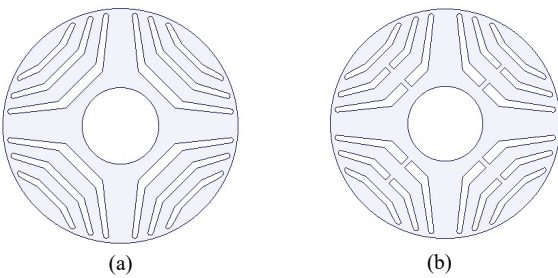


Fig. 07 – Terceiro modelo de rotor com 4 barreiras de fluxo (a) sem ponte e (b) com ponte.

A vantagem nos modelos sem ponte (Fig. 05 (a), Fig. 06 (a) e Fig. 07 (a)) está no caminho contínuo do fluxo magnético e a desvantagem é a redução na resistência mecânica da lâmina utilizada na construção do rotor.

Os modelos com ponte (Fig. 05 (b), Fig. 06 (b) e Fig. 07 (b)) apresentam a vantagem de maior resistência mecânica em relação ao modelo anterior, porém o fluxo magnético sofre alteração no caminho percorrido.

### B. Análise de projeto de rotores

Após determinação de alguns parâmetros como largura das barreiras de fluxo, espaçamento entre eles e quantidade de barreiras por fluxo, gerou-se o modelo do corte da lâmina para construção do rotor e utilizou-se a análise por elementos finitos para visualização do campo magnético no rotor.

Na Fig. 08 é possível observar-se que as pontes criam pontos com alta concentração magnética devido a fina espessura dos mesmos.

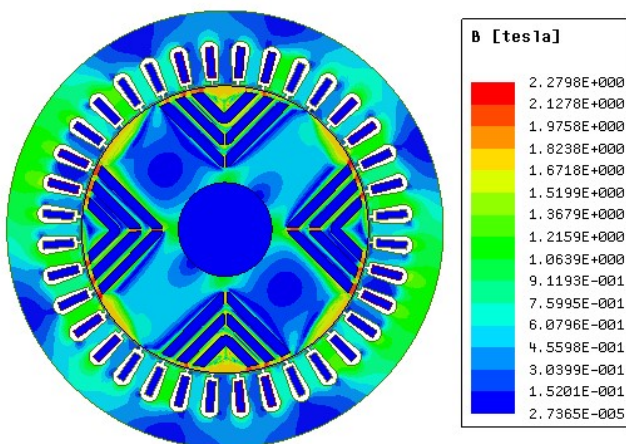


Fig. 08 – Análise do primeiro modelo de rotor com 3 barreiras de fluxo.

Para a Fig. 09, tem-se o modelo 2 de rotor, onde é possível observar que o campo magnético é melhor distribuído nos polos e que os pontos de maior concentração estão nos extremos dos polos do motor.

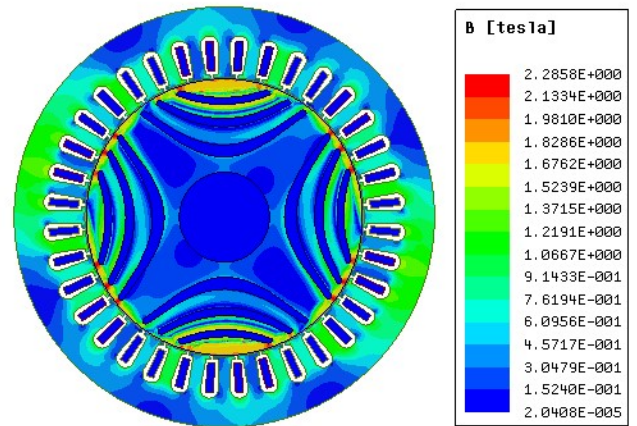


Fig. 09 – Análise do primeiro modelo de rotor com 3 barreiras de fluxo.

Com a Fig. 10 tem o rotor de modelo 3, onde observa-se que os resultados da geometria das barreias de fluxo apresentam resultados próximos aos do modelo 2.

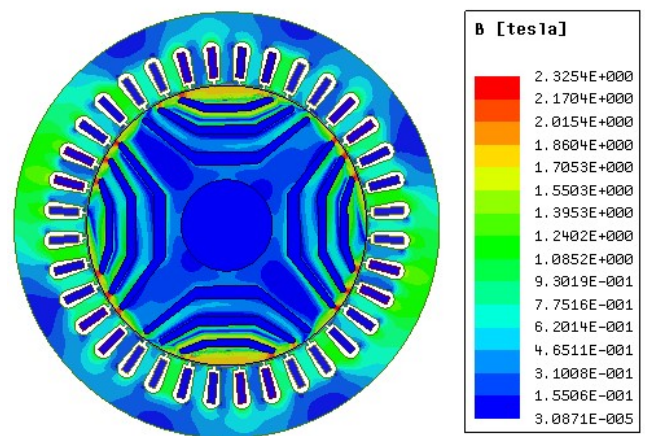


Fig. 10 – Análise do primeiro modelo de rotor com 3 barreiras de fluxo.

De acordo com a análise das Fig. 08 a Fig. 10, o modelo 1 não apresenta uma geometria tão eficiente quanto os outros (2 e 3) em relação a distribuição de campo magnético pela superfície da lâmina do rotor.

## CONCLUSÕES

Os motores síncronos à relutância estão sendo cada vez mais investigados, graças ao avanço da tecnologia que permite o acionamento eficiente dos mesmos. Devido às pequenas dimensões dos rotores de baixa potência, alguns pesquisadores têm propostos formas mistas de construção, como a utilização de slots em maior número como em [6] e até mesmo, a utilização de ímãs permanentes como em [7]

para que o fator de saliência chegue próximo de 10, para que seja possível um desempenho melhor que o motor de indução e com construção mais barata que o motor síncrono convencional.

A modelagem matemática do motor síncrono a relutância foi apresentada neste trabalho, com ênfase aos parâmetros de grande importância para a indústria, tais como conjugado e fator de potência.

Apresentou-se também 3 modelos diferentes para a construção de rotores, juntamente com a análise por elementos finitos do comportamento do campo magnético no rotor, onde é possível se observar que a opção pelo modelo 2 ou 3 terá um resultado mais satisfatório.

Para trabalhos futuros, observa-se a necessidade da construção do protótipo do motor síncrono a relutância para ensaios em laboratório para comparação entre os resultados analíticos e experimentais.

### AGRADECIMENTOS

Este projeto teve suporte financeiro da FAPEG/CNPQ e FAPEMIG.

### REFERÊNCIAS

- [1] C. E. G. Martins; P. Kuo-Peng ; N. Sadowski. "Design of synchronous reluctance motors with flux barriers using 2D-FEM". IEMDC'03. IEEE International, p. 1669-1673, Vol. 3, 1-4 June, 2003.
- [2] R. E. Betz; R. Lagerquist; M. Jovanovic; T. J. E. Miller; R. H. Middleton; "Control of synchronous reluctance machines," IEEE Trans. Ind. Applicat., vol. 29, no. 6, pp. 1110-1122, 1993.
- [3] F. Piriou and A. Razeq, "Calculation of saturated inductances for numerical simulation of synchronous machines," IEEE Trans. Magn., vol. 19, no. 6, pp. 2628-2631, 1983.
- [4] P. L. Alger, Induction Machines, Gordon and Breach Science Publishers, Second Edition, 1970.
- [5] T. Lubin; H. Razik; A. Rezzoug. "Magnetic Saturation Effects on the Control of a Synchronous Reluctance Machine". IEEE Transactions On Energy Conversion, Vol. 17, No. 3, September, 2002.
- [6] C. M. Spargo; B. C. Mecrow; J. D. Widmer. "Application of Fractional Slot Concentrated Windings to Synchronous Reluctance Machines". Proceedings of the 2013 IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC). May 12-15, Chicago, IL, 2013.
- [7] X. Chen; J. Wang; P. Lazari; L. Chen. "Permanent Magnet Assisted Synchronous Reluctance Machine with Fractional-Slot Winding Configuration". Proceedings of the 2013 IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC). May 12-15, Chicago, IL, 2013.