

# MODELAGEM MATEMÁTICA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UMA MÁQUINA DE INDUÇÃO TRIFÁSICA DE ROTOR BOBINADO NO DOMÍNIO DO TEMPO

L. P. Moura, M. L. R. Chaves, I. N. Santos, M. S. Lima, V. C. Paula, D. A. L. Santana  
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Elétrica, Uberlândia – MG

**Resumo** – A modelagem computacional de máquinas elétricas de indução tem importância significativa em diversos estudos de desempenho das mesmas sob condições transitórias, dinâmicas e de regime permanente. Para tanto, trabalhos disponíveis na literatura técnica especializada apresentam diversos modelos de máquinas elétricas, os quais são obtidos a partir de simplificações matemáticas julgadas adequadas e admissíveis para determinadas condições de análise. Ressalta-se, no entanto, que algumas das simplificações comumente feitas podem resultar na representação incorreta de uma máquina real quando submetida às condições não ideais impostas por um sistema elétrico. Neste contexto, o presente artigo apresenta uma modelagem matemática da máquina de indução trifásica de rotor bobinado desenvolvido no domínio do tempo. Ao longo do texto, descreve-se em detalhes o desenvolvimento das equações matemáticas relacionadas com os princípios de funcionamento da máquina, bem como as considerações feitas para validação do modelo. No que se refere à implementação computacional do modelo matemático, optou-se pela utilização do *software* ATP.

**Palavras-chave** – Máquina de indução, modelagem matemática, modelagem computacional, domínio do tempo.

## MATHEMATICS AND COMPUTATIONAL MODELING IMPLEMENTATION OF AN THREE-PHASE WOUND ROTOR INDUCTION MACHINE IN TIME DOMAIN

**Abstract** – Computer modeling electrical induction machines have significant importance in many studies of the performance under transient, dynamic and steady conditions. Therefore, jobs available in the specialized technical literature present many electrical machines, which are obtained from mathematical simplifications tried adequate and acceptable for certain analytical conditions. It is noteworthy, however, that some of the simplifications commonly made can result in incorrect representation of a real machine when subjected to non-ideal conditions imposed by an electrical system. In this context, this paper presents a mathematical model of three-phase wound rotor induction machine developed in the time domain. Throughout the text, describes in detail the development of mathematical

equations related to the machine's operating principles and considerations made for model validation. With regard to computer implementation of the mathematical model, we opted for the use of ATP software.

**Index Terms** – Induction machine, mathematical modeling, computational modeling, time domain.

### NOMENCLATURA

$v$	tensão instantânea (V);
$i$	corrente elétrica instantânea (A);
$R$	resistência elétrica ( $\Omega$ );
$t$	unidade de tempo (s);
$\lambda$	concatenamento de fluxo (Wb);
$l, L$	indutância instantânea/máxima do enrolamento (H);
$\alpha$	ângulo entre campos magnéticos do estator e rotor;
$C_{elétr.}$	conjugado eletromagnético (N.m);
$np$	número de polos da máquina;
$P_n$	potência nominal no eixo do motor de indução (W);
$V_n$	tensão nominal de linha do estator (V);
$I_n$	corrente elétrica nominal do estator (A);
$I_p$	corrente elétrica de partida (A);
$FP_n$	fator de potência nominal do motor de indução;
$\eta_n$	rendimento nominal do motor de indução;
$n_n$	velocidade nominal do eixo mecânico (rpm);

### I. INTRODUÇÃO

A modelagem computacional de máquinas elétricas se faz necessária no estudo e na investigação dos efeitos que os diversos fenômenos associados à rede elétrica podem causar nas mesmas. É importante que o modelo de máquina elétrica responda corretamente quando submetido a tensões harmônicas (e/ou inter-harmônicas), variações de tensão de curta duração, desequilíbrios de tensão, dentre outros. Ainda, a representação adequada das máquinas de indução como tais, e não como modelos de impedância, de corrente ou de potência constantes, é também

importante no estudo dos efeitos que estas podem causar na rede elétrica.

Pode-se encontrar na literatura técnica especializada uma grande quantidade de modelos de máquinas elétricas de indução [1]. Alguns modelos são baseados em suposições que simplificam as equações matemáticas, o que facilita a implementação computacional e dá velocidade de processamento dos resultados.

No entanto, no presente trabalho, optou-se por apresentar a modelagem da máquina elétrica de indução no domínio do tempo. Acredita-se que este tipo de modelo possa ser indispensável em alguns estudos de comportamento das máquinas elétricas, uma vez que as mesmas podem ser submetidas a condições não ideais de funcionamento [1-5].

Para a completa representação do comportamento dinâmico das grandezas internas da máquina deve-se atentar para os seguintes pontos:

- Equacionamento para concatenamento de fluxo nos enrolamentos da máquina;
- Equacionamento para o conjugado eletromagnético resultante;
- Equacionamento para as correntes nos enrolamentos do estator e do rotor.

Tais pontos são discutidos nas próximas seções e, posteriormente, apresenta-se a implementação computacional do modelo proposto. Com a finalidade de simplificar as análises, parte-se dos seguintes pressupostos:

- O estator e o rotor são cilindros concêntricos e as aberturas de ranhuras são desprezadas. Logo, os efeitos de saliências na relutância de entreferro normalmente existentes no interior da máquina não são considerados;
- Considera-se uma perfeita distribuição dos enrolamentos (desconsidera-se as harmônicas espaciais produzidas por enrolamentos concentrados);
- Para se determinar o comportamento do conjugado eletromecânico da máquina elétrica, trabalha-se com parâmetros constantes. Assim, considera-se que a operação da máquina se dá na região linear da curva de magnetização.

## II. EQUACIONAMENTO PARA CONCATENAMENTO DE FLUXO NOS ENROLAMENTOS

A tensão instantânea ( $v$ ) nos terminais de um enrolamento qualquer do estator de uma máquina elétrica de indução pode ser representada pela equação (1). A primeira parcela da equação representa a queda de tensão na resistência do enrolamento e a segunda parcela diz respeito à tensão devido às variações de fluxo magnético, tanto do enrolamento em questão quanto dos enrolamentos acoplados com o primeiro.

$$v = Ri + \frac{d\lambda_{total}}{dt} \quad (1)$$

Como apresentado pela equação (2), o concatenamento de fluxo magnético total ( $\lambda_{total}$ ) possui duas parcelas distintas. A

primeira parcela é chamada de fluxo próprio ou fluxo de dispersão ( $\lambda_{próprio}$ ), o qual é produzido pela corrente do enrolamento e não contribui para a formação do campo girante. A segunda parcela corresponde aos fluxos magnéticos produzidos por correntes que percorrem outros enrolamentos acoplados com o primeiro ( $\lambda_{mútuo}$ ).

$$\lambda_{total} = \lambda_{próprio} + \lambda_{mútuo} \quad (2)$$

A componente do concatenamento de fluxo mútuo pode ser decomposta em várias outras. Para a fase A do estator:

$$\begin{aligned} \lambda_{A(total)} &= \lambda_{AA} + \lambda_{AB} + \lambda_{AC} + \lambda_{Aa} + \lambda_{Ab} + \lambda_{Ac} \\ &= l_{AA}i_A + l_{AB}i_B + l_{AC}i_C + l_{Aa}i_a + l_{Ab}i_b + l_{Ac}i_c \end{aligned} \quad (3)$$

Para a fase A do rotor, escreve-se:

$$\begin{aligned} \lambda_{a(total)} &= \lambda_{aa} + \lambda_{ab} + \lambda_{ac} + \lambda_{aA} + \lambda_{aB} + \lambda_{aC} \\ &= l_{aa}i_a + l_{ab}i_b + l_{ac}i_c + l_{aA}i_A + l_{aB}i_B + l_{aC}i_C \end{aligned} \quad (4)$$

Deste modo, é necessário determinar como as indutâncias mútuas entre os enrolamentos variam de acordo com a posição do eixo do rotor da máquina elétrica. A indutância mútua entre um enrolamento X e um enrolamento Y, sendo  $\alpha_{XY}$  o ângulo entre os eixos dos enrolamentos, é dada por [2,6]:

$$l_{XY} = L_{XY} \cos(\alpha_{XY}) \quad (5)$$

O ângulo entre os eixos de dois enrolamentos é determinado levando em consideração a Fig. 1, na qual as setas representam os eixos de cada fase, tanto do rotor quanto do estator. Os eixos das fases do rotor têm velocidade  $\omega_{eixo}$ , enquanto que os eixos dos estator são fixos para uma dada posição de referência (eixo da fase A).

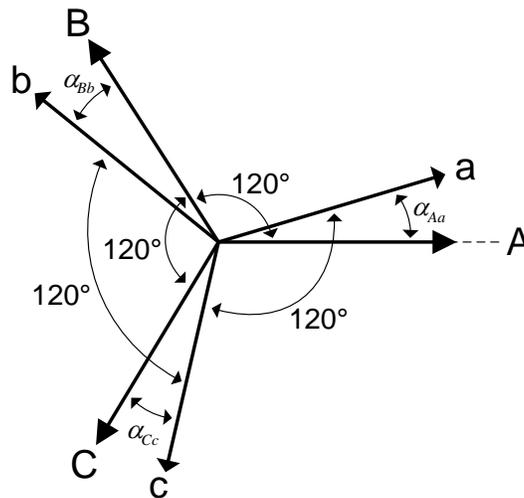


Figura 1 - Determinação dos ângulos entre os eixos dos enrolamentos da máquina.

De acordo com a análise da Fig. 1, as indutâncias mútuas definidas pelas equações (3) e (4) são dadas pelas seguintes expressões:

$$l_{AA} = L_{AA} \cos(0^\circ) = L_{AA} \quad (6)$$

$$l_{AB} = L_{AB} \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2} L_{AB} \quad (7)$$

$$l_{AC} = L_{AC} \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2} L_{AC} \quad (8)$$

$$l_{Aa} = L_{Aa} \cos(\alpha) \quad (9)$$

$$l_{Ab} = L_{Ab} \cos(120^\circ + \alpha) \quad (10)$$

$$l_{Ac} = L_{Ac} \cos(-120^\circ + \alpha) \quad (11)$$

$$l_{aa} = L_{aa} \cos(0^\circ) = L_{aa} \quad (12)$$

$$l_{ab} = L_{ab} \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2} L_{ab} \quad (13)$$

$$l_{ac} = L_{ac} \cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2} L_{ac} \quad (14)$$

$$l_{aA} = L_{aA} \cos(-\alpha) \quad (15)$$

$$l_{aB} = L_{aB} \cos(120^\circ - \alpha) \quad (16)$$

$$l_{aC} = L_{aC} \cos(-120^\circ - \alpha) \quad (17)$$

Assim, pode-se perceber que as indutâncias mútuas entre os enrolamentos do estator são constantes e não variam em função de  $\alpha$  como as indutâncias mútuas entre enrolamentos do estator e rotor. A fim de simplificar as equações, é aceitável considerar que as indutâncias mútuas máximas entre os enrolamentos sejam iguais entre si. De fato, os enrolamentos de todas as fases do estator são idênticos, assim como os enrolamentos das fases do rotor. Ressalta-se, no entanto, que os enrolamentos do rotor e estator podem não ter o mesmo número de espiras. Sendo assim:

$$L_{AA} = L_{AB} = L_{AC} = L_{EE} \quad (18)$$

$$L_{Aa} = L_{Ab} = L_{Ac} = L_{aA} = L_{aB} = L_{aC} = L_{ER} \quad (19)$$

$$L_{aa} = L_{ab} = L_{ac} = L_{RR} \quad (20)$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações (3) e (4), as seguintes expressões matemáticas podem ser obtidas:

$$\lambda_{A(total)} = L_{EE} \left( i_A - \frac{1}{2} i_B - \frac{1}{2} i_C \right) + \quad (21)$$

$$+ L_{ER} [\cos(\alpha) i_a + \cos(120^\circ + \alpha) i_b + \cos(-120^\circ + \alpha) i_c]$$

$$\lambda_{a(total)} = L_{RR} \left( i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c \right) + \quad (22)$$

$$+ L_{RE} [\cos(\alpha) i_A + \cos(120^\circ - \alpha) i_B + \cos(-120^\circ - \alpha) i_C]$$

Finalmente, as equações (21) e (22), combinadas com a equação (1), representam as equações dos terminais elétricos de uma máquina de indução trifásica de rotor bobinado. As expressões para o concatenamento de fluxo das fases B e C, do estator e do rotor, são obtidas de forma análoga.

### III. EQUACIONAMENTO PARA O CONJUGADO ELETROMAGNÉTICO RESULTANTE

O conjugado eletromagnético resultante no entreferro de uma máquina de indução trifásica de rotor bobinado pode ser decomposto em três parcelas distintas [2]:

$$C_{elétr.} = -\frac{(np)}{2} L_{ER} (c_1 + c_2 + c_3) \quad (23)$$

$$c_1 = (i_A i_a + i_B i_b + i_C i_c) \text{sen}(\alpha) \quad (24)$$

$$c_2 = (i_A i_b + i_B i_c + i_C i_a) \text{sen}(120^\circ + \alpha) \quad (25)$$

$$c_3 = (i_A i_c + i_B i_a + i_C i_b) \text{sen}(-120^\circ + \alpha) \quad (26)$$

Cada parcela é determinada de acordo com a posição dos enrolamentos do estator em relação aos enrolamentos do rotor, assim como verificado na Fig. 1.

Sendo assim, o comportamento do conjugado eletromagnético em uma máquina trifásica, tomando-se como base na equação (23), será determinado pelas correntes presentes nos enrolamentos do estator e rotor da máquina.

### IV. EQUACIONAMENTO PARA AS CORRENTES NOS ENROLAMENTOS

As correntes instantâneas nos enrolamentos da fase A do estator e da fase A do rotor podem ser determinadas pelas equações (27) e (28), respectivamente.

$$i_A = \frac{\left( v_A - \frac{d\lambda_{A(total)}}{dt} \right)}{R_A} \quad (27)$$

$$i_a = \frac{\left( v_a - \frac{d\lambda_{a(total)}}{dt} \right)}{R_a} \quad (28)$$

Sendo assim, as correntes nos enrolamentos da máquina são determinadas pelas tensões aplicadas nos terminais elétricos e pela força contra-eletromotriz estabelecida devido à influência mútua entre campos magnéticos no entreferro da máquina. As expressões as correntes das fases B e C, do estator e do rotor, são obtidas de forma análoga.

## V. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E VALIDAÇÃO DO MODELO

Uma vez apresentadas as equações matemáticas que representam o comportamento dinâmico das grandezas internas de uma máquina de indução trifásica de rotor bobinado, torna-se possível a implementação das mesmas em ambiente computacional. Com o objetivo de contribuir com estudos de desempenho sob condições transitórias, dinâmicas e de regime permanente, a opção feita quanto a plataforma computacional empregada recaiu sobre o *software* ATP, o qual se baseia em modelagens no domínio do tempo.

Tomou-se a rotina MODELS como estratégia de modelagem. O termo “rotina” é utilizado por se tratar de uma extensão ou parte de um arquivo de dados do ATP. Utilizou-se o método de Newton-Raphson para resolução das equações matemáticas apresentadas anteriormente. O diagrama apresentado na figura a seguir indica as relações de entrada e saída entre o ATP e a MODELS:

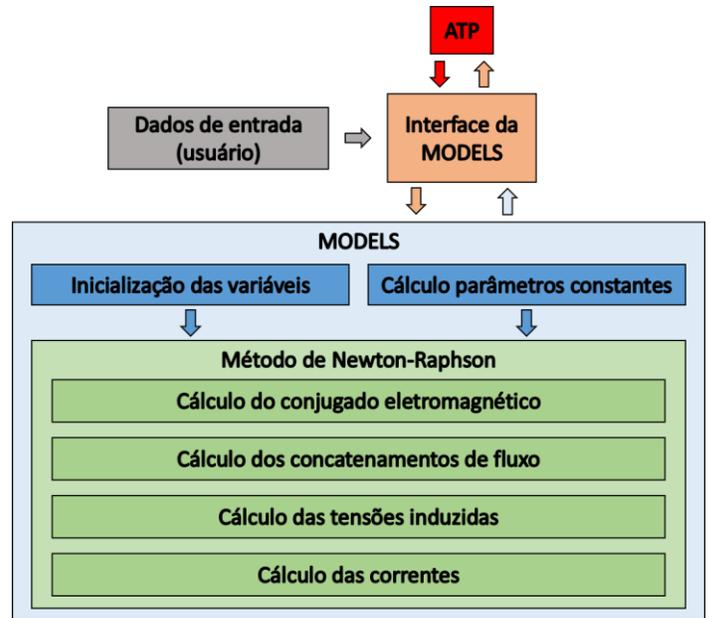


Figura 2 – Diagrama representativo do modelo proposto e da comunicação entre rotina MODELS e o ATP.

Os dados de entrada dizem respeito aos parâmetros de entrada, os quais devem ser calculados pelo usuário e inseridos na interface da MODELS, uma vez que tais parâmetros são necessários para o cálculo dos parâmetros constantes do modelo. Optou-se, no presente trabalho, por realizar a estimação de parâmetros com base em dados nominais de um motor de indução trifásico de rotor bobinado obtidos em catálogos de fabricantes. Os dados nominais do motor de indução escolhido são apresentados na tabela a seguir:

Tabela 1 - Dados nominais do motor de indução trifásico de rotor bobinado (conexão em estrela).

$P_n$	90 kW
$V_n$	220 V
$I_n$	301 A
$I_n/I_p$	6
$FP_n$	0,84
$\eta_n$	93,5 %
$n_n$	1185 rpm

Para a estimação dos parâmetros são feitas, ainda, as seguintes considerações:

- As perdas mecânicas do motor representam cerca de 10% das perdas totais;
- O eixo do motor está diretamente acoplado com o eixo da carga;
- O conjugado no eixo do motor é proporcional à velocidade (linear), assim como as perdas rotacionais.

É necessário, ainda, a representação do eixo mecânico da máquina de indução. Para representação de um sistema mecânico no software ATP, é necessário fazer uma analogia entre grandezas mecânicas e grandezas elétricas. Isto porque o *software* trabalha apenas com grandezas elétricas (tensão, corrente, potência e energia). A analogia é feita como descrito em [7].

Finalmente, a fim de validar o modelo proposto a partir da estimação de parâmetros realizada, considerou-se o funcionamento de um motor de indução trifásico cujos enrolamentos do rotor estão em curto-circuito. Espera-se que, após o acionamento do motor em condições de partida direta, o mesmo desenvolva velocidade nominal, corrente nominal e potência nominal.

A Fig. 3 apresenta o circuito utilizado para obtenção dos resultados. Observa-se que o estator do motor de indução trifásico de rotor bobinado, cujos parâmetros foram estimados, está conectado num barramento de 220 V. A seguir, apresenta-se uma síntese dos resultados obtidos.

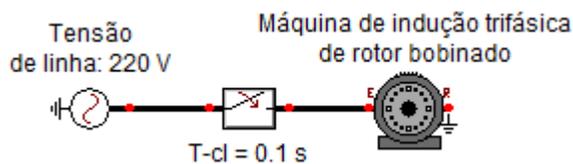


Figura 3 - Acionamento (partida direta) do motor de indução trifásico de rotor bobinado.

1) Correntes no estator:

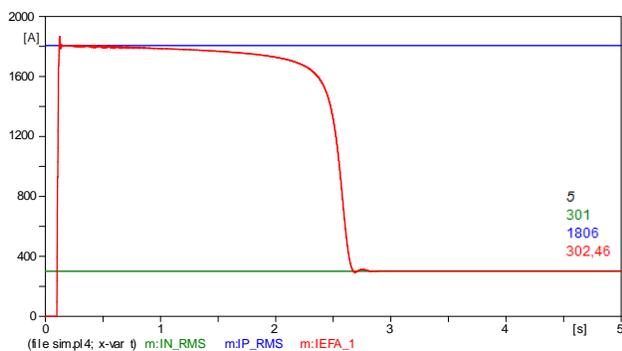
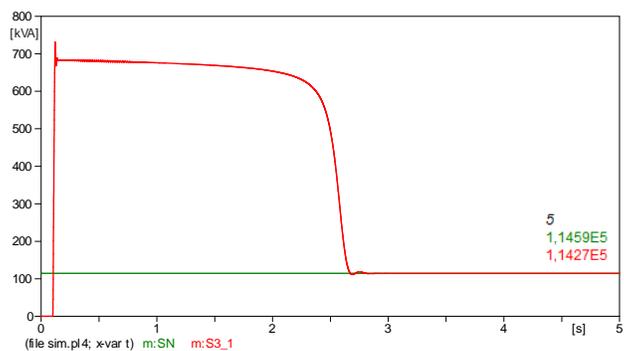


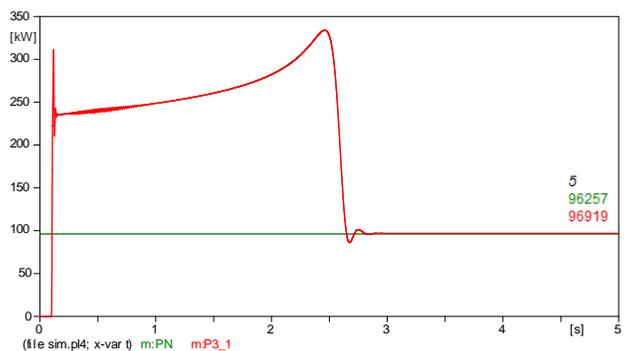
Figura 4 – Valor eficaz da corrente da fase A e valores de corrente de partida e de regime permanente esperados no estator da máquina de indução.

Percebe-se que a corrente do estator da máquina de indução trifásica apresenta amplitudes próximas das esperadas, tanto a corrente de partida quanto a corrente de regime permanente.

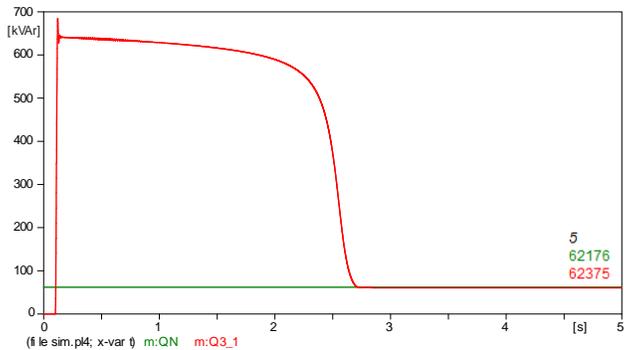
2) Potências aparente, ativa e reativa:



(a) – Potência aparente;



(b) – Potência ativa;



(c) – Potência reativa;

Figura 5 - Potências trifásicas solicitadas pela máquina de indução trifásica durante partida direta.

Constatou-se que as potências aparente, ativa e reativa de entrada da máquina condizem com os dados fornecidos pelo catálogo do fabricante.

### 3) Fator de potência:

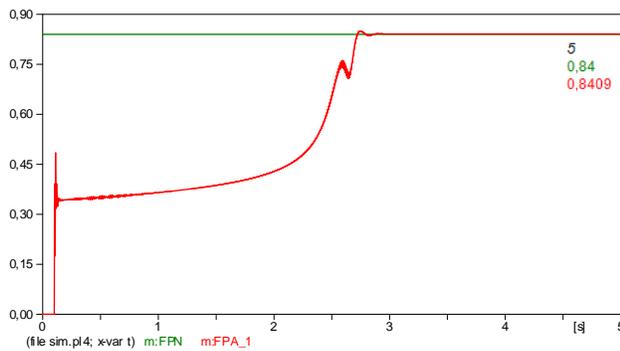


Figura 6 – Fator de potência da máquina de indução durante partida direta.

### 4) Velocidade mecânica do eixo:

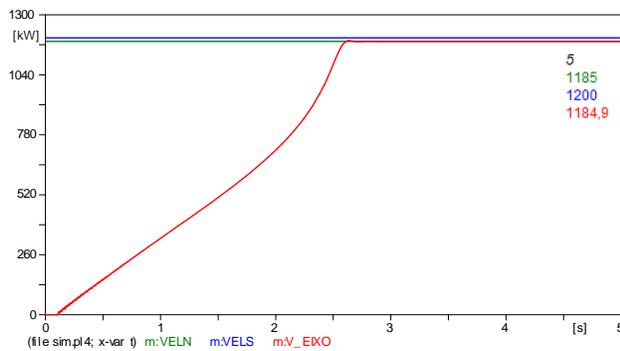


Figura 7 - Variação da velocidade do eixo do motor durante partida direta.

## VI. CONCLUSÕES

O presente artigo apresentou as principais equações matemáticas relacionadas com o funcionamento de uma máquina de indução trifásica de rotor bobinado. Tais equações foram obtidas a partir da análise dos ângulos existentes entre os eixos dos enrolamentos de cada fase da máquina, tanto do estator quanto do rotor.

Constatou-se que a equação para o conjugado eletromagnético resultante na máquina elétrica de indução trifásica de rotor bobinado, assim como as demais equações, foram formuladas tomando-se como base as equações básicas de apresentadas em [6]. Ressalta-se que em nenhum momento o modelo é simplificado tomando como pressuposto que as correntes no estator da máquina sejam produzidas por um sistema equilibrado simétrico de tensões, ou que as formas de onda das tensões aplicadas sejam perfeitamente senoidais. Verificou-se a necessidade da utilização de um método numérico para a resolução equações matemáticas apresentadas no ambiente computacional escolhido.

Quanto à estimação dos parâmetros de circuito equivalente e validação do modelo de máquina de indução trifásica de rotor bobinado, os resultados obtidos são coerentes e condizentes com as informações disponibilizadas no catálogo do fabricante,

atendendo de forma satisfatória os valores de corrente nominal, fator de potência nominal e potência nominal da máquina.

Sugere-se como trabalhos futuros:

- Realização de ensaios em laboratório para validação do modelo de máquina elétrica de indução trifásica nas condições consideradas no presente trabalho;
- Submissão do modelo apresentado aos diversos problemas relacionados com a qualidade da energia elétrica e que os resultados obtidos sejam comparados com medições reais, a fim de validar o modelo para estas condições. Espera-se que o modelo ofereça resultados condizentes com os resultados das medições;
- Incorporar às equações do modelo o fator de enrolamento (que combina os efeitos do fator de passo e fator de distribuição) e os efeitos de saturação do núcleo da máquina. Acredita-se que assim o modelo possa representar, da forma mais fiel possível, uma máquina elétrica de indução real.

## VII. REFERÊNCIAS

- [1] M. A. Snyder, “Development of Simplified Models of Doubly-Fed Induction Generators,” 2012.
- [2] P. C. Sen, Principles of Electric Machines and Power Electronics. 1997.
- [3] X. Jing, “Modeling and Control of a Doubly-Fed Induction Generator for Wind Turbine-Generator Systems,” Marquette University, 2009.
- [4] S. M. Bolik, Modelling and Analysis of Variable Speed Wind Turbines with Induction Generator during Grid Fault. 2004.
- [5] P. Varma and B. Chakri, “Study of Grid Connected Induction Generator for Wind Power Applications,” National Institute of Technology, Rourkela, 2012.
- [6] A. Fitzgerald, Máquinas Elétricas, 6th ed. São Paulo: Bookman, 2008.
- [7] C. A. de U. de E.-A. CAUE, Rule Book - ATP - Alternative Transient Program. 2001.