

PROBLEMA DE DIFUSÃO DE CALOR RESOLVIDO POR MEIO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PARABÓLICAS

Renato S. Gomide¹, Luiz F. B. Loja¹, Edna L. Flôres¹

1 – Universidade Federal de Uberlândia, Departamento de Engenharia Elétrica, Uberlândia – MG, renato@doutorado.ufu.br, luizloja@gmail.com, edna@ufu.br

Resumo - Este trabalho tem como objetivo estudar a resolução computacional de Equações Diferenciais Parciais por meio de um problema físico. O problema físico utilizado neste estudo de caso consiste na equação de difusividade de calor de uma barra. O modelo matemático para este problema é uma Equação Diferencial Parcial do tipo parabólica de segunda ordem com duas variáveis independentes. A solução da equação diferencial foi obtida pelo método de aproximação por diferenças finitas. Foram realizadas simulações para três tipos de materiais diferentes: aço, alumínio e vidro. Os resultados das simulações são apresentados em gráficos que contém as temperaturas em diversas regiões da barra em diferentes instantes de tempo.

Palavras-Chave - diferenças finitas, difusividade térmica, equações parabólicas, equações diferenciais parciais.

USING PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLVE THE PROBLEM OF DISSEMINATION OF HEAT

Abstract - The aim of this work is study the computational resolution of Partial Differential Equations by a physical problem. The physical problem used in this study consists in the diffusivity of heat equation of a bar. The mathematical model for this problem is a partial differential equation of parabolic type of second order with two independent variables. The solution of the differential equation was obtained by the approximation method by finite differences. Simulations were performed for three different materials: steel, aluminum and glass. The simulation results are presented in charts that contains the temperatures in various regions of the bar at different instants of time.

Keywords - finite differences, parabolic equations, partial differential equations, thermal diffusivity.

I. INTRODUÇÃO

A maioria das aplicações práticas de engenharia utilizam formulações obtidas por equações diferenciais. Uma equação

diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas da variável independente [1].

As equações diferenciais podem ser classificadas como ordinárias ou parciais. As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) possuem apenas uma variável independente, enquanto que as Equações Diferenciais Parciais (EDP) apresentam duas ou mais variáveis independentes [2].

Este trabalho tem como objetivo apresentar um problema de engenharia formulado por uma EDP e um método numérico computacional que efetue a solução do problema.

As seções 2 e 3 apresentam uma explicação resumida sobre EDPs e a descrição do problema físico formulado por uma EDP. A metodologia utilizada na solução do problema é mostrada na seção 4 e a apresentação e análise dos resultados estão na seção 5.

II. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

A maioria dos problemas físicos envolve duas ou mais variáveis independentes, de tal forma que o modelo matemático correspondente utiliza EDPs ao invés de EDOs.

Os métodos para soluções para EDP mais conhecidos são: séries de Fourier, separação de variáveis, equação de Laplace e método das diferenças finitas [3].

A. Equações de Segunda Ordem

A maioria das aplicações em engenharia utiliza EDP de segunda ordem. A equação (1) representa uma EDP de segunda ordem com duas variáveis independentes (x, y).

$$a \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + b \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + c \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + d \frac{\delta u}{\delta x} + e \frac{\delta u}{\delta y} + fu + g = 0 \quad (1)$$

Se a, b, c, ..., g são funções de x e y apenas, a equação é linear, mas se estes coeficientes possuem u ou suas derivações, a equação é não linear. O grau de uma EDP corresponde à ordem da maior derivação [2].

Os coeficientes a, b e c também devem satisfazer a condição da equação (2):

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \quad (2)$$

Se os coeficientes a, b e c forem constantes, as EDPs lineares podem ser classificadas como hiperbólica, parabólica ou elíptica [4].



XII CEEL – ISSN 2178-8308
13 a 17 de Outubro de 2014
Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Uberlândia – Minas Gerais – Brasil

A Tabela 1 apresenta os tipos de EDPs em relação aos coeficientes a, b e c.

Tabela I - Tipos de Equações Diferenciais Parciais lineares

Tipo de EDP	Relação	Solução
Hiperbólica	$b^2 - ac > 0$	Raízes reais e distintas
Parabólica	$b^2 - ac = 0$	Raízes reais e idênticas
Elíptica	$b^2 - ac < 0$	Raízes conjugadas complexas

Para melhor compreensão dos tipos de EDPs, o espaço das soluções pode ser visualizado sob uma perspectiva geométrica. A Figura 1 apresenta as curvas geométricas que representam a solução das EDPs conforme a configuração dos coeficientes a, b e c.

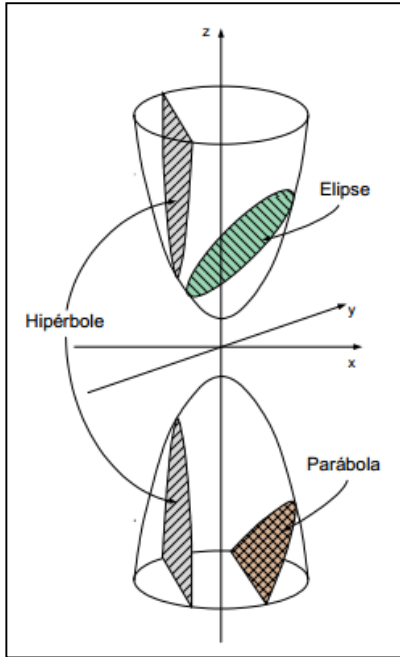


Fig. 1. Curvas cônicas representativas das EDPs lineares [4].

Os métodos mais populares para a solução destes tipos de EDPs são os métodos de elementos finitos e das diferenças finitas [2]. O problema físico citado neste trabalho envolve a uma EDP do tipo parabólica, no qual a solução do problema consiste na utilização de diferenças finitas.

B. Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas baseia-se na aproximação dos valores das derivadas de primeira e segunda ordem de uma função $u(x, y)$. A função u realiza essa aproximação por meio das equações das diferenças divididas de primeira e segunda ordem em x e y . Essa aproximação é demonstrada pelas equações de (3) a (6) [4].

Diferença central:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l} \quad (4)$$

Diferença de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{(x_{i+1} - x_{i-1})^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{(y_{j+1} - y_{j-1})^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{l^2} \quad (6)$$

A solução de EDP pelo método das diferenças finitas consiste basicamente em quatro etapas [2].

Primeiramente a solução espacial do problema é dividida em uma grade, sendo que o formato da grade caracteriza a natureza do problema e as condições de contorno.

A segunda etapa consiste em obter a fórmula de diferença finita compatível com a EDP que representa o problema. Para cada ponto que representa o problema físico é obtido uma equação no qual os elementos vizinhos também fazem parte da equação.

A terceira etapa do método das diferenças finitas faz com que cada ponto da grade seja equacionado, formando um sistema de equações para todo o problema.

E a quarta etapa da solução equivale à resolução do sistema de equações elaborado na terceira etapa por meio de algum método numérico.

C. Características das Equações Diferenciais Parciais Parabólicas

As EDPs parabólicas são geralmente modelos matemáticos para problemas de contorno no qual uma das variáveis independentes é o tempo e a outra variável independente pode ser expandida sem limites.

A Figura 2 ilustra o domínio da solução para problemas do tipo parabólicos

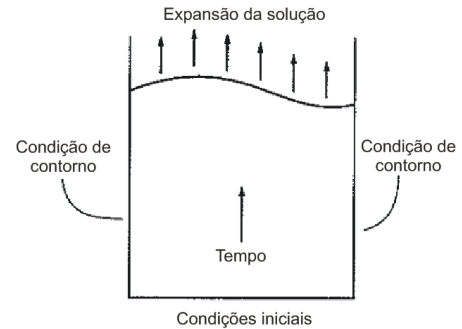


Fig. 2. Domínio da solução para problemas parabólicos. Adaptado de [2].

Muitas vezes uma EDP parabólica possui o formato representado pela equação (7) [2]. Os coeficientes a, b e c estão de acordo com a relação $b^2 - 4ac = 0$ pois $a = k$ e $b = c = 0$.

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

A próxima seção aborda o modelo matemático de difusão de calor em uma barra de comprimento L , no qual a equação do calor corresponde a uma EDP parabólica.

III. PROBLEMA DE DIFUSÃO DE CALOR

A equação de difusão de calor em uma barra de material qualquer é definida pela equação (8) [5].

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

Onde T é a temperatura como uma função de localização em x e tempo t no qual a difusividade térmica é expressa por α .

O desenvolvimento da equação de difusão de calor apresentado nesta seção segue a explicação disponível em [6]. A difusividade térmica é expandida pela seguinte equação:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (9)$$

Onde k corresponde à condutividade térmica do material da barra ($\frac{W}{mK}$), ρ é a densidade do material ($\frac{kg}{m^3}$) e C o calor específico do material da barra ($\frac{J}{kgK}$).

Para resolver a equação de difusão de calor computacionalmente, pode ser utilizada uma das técnicas de métodos finitos. A solução abordada neste trabalho utiliza a aproximação por diferenças finitas das derivadas parciais que dependem do tempo (t) e da localização (x).

Desenvolvendo a equação (5) obtém-se a aproximação pelo método das diferenças:

$$\frac{\partial y}{\partial x} |_{i,j} \cong \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (10)$$

Onde i é o ponto ao longo da direção de x , j é o ponto relacionado ao tempo e Δx a distância entre os pontos x . A Figura 3 apresenta um esquema de como o problema pode ser representado na forma discreta utilizando os componentes da equação (10).

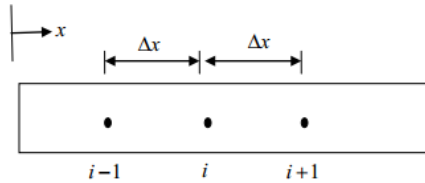


Fig. 3. Esquema da representação por pontos do modelo [6].

A formulação do problema em questão consiste em dividir uma barra de tamanho L em $n+1$ pontos por meio da relação:

$$\Delta x = \frac{L}{n} \quad (11)$$

Como o tempo também é uma das variáveis independentes do problema, o tempo total de execução é dividido em passos Δt . A derivada do tempo do lado direito da equação (8) é aproximada pela seguinte diferença:

$$\frac{\partial T}{\partial t} |_{i,j} \cong \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} \quad (12)$$

Substituindo as equações (10) e (12) na equação (8) obtém-se:

$$\alpha \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} = \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} \quad (13)$$

Isolando a equação de tal forma que a temperatura esteja no ponto $j+1$ tem-se:

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) \quad (14)$$

Para simplificar a equação, é definido um fator λ representado por:

$$\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (15)$$

Portanto, a equação final é expressa por:

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \lambda (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) \quad (16)$$

A equação (16) pode ser resolvida de forma numérica para cada ponto no qual a barra foi dividida para o tempo $j+1$. O problema possui como valores de contorno as temperaturas externas e do lado direito e esquerdo da barra no instante $t = 0s$.

Esta modelagem matemática permite que a barra possua como variáveis de contorno a temperatura do lado esquerdo e do lado direito. Caso seja necessário simular o comportamento utilizando apenas a temperatura de um dos lados da barra, é recomendado que repita o penúltimo termo T no lugar da temperatura do lado direito [2].

Para calcular a temperatura nas regiões da barra para um instante n , basta iterar a equação (16) até obter o instante n . Cada etapa de execução da equação incrementa Δt no tempo. A descrição detalhada da solução computacional para a resolução do problema é apresentada na próxima seção.

IV. METODOLOGIA

A resolução do problema proposto foi desenvolvida utilizando a linguagem computacional *GNU/Octave*. O tempo de processamento para a solução encontrada não é relevante, portanto, a descrição do hardware e do sistema operacional utilizado não é citada neste trabalho.

Para a coleta dos resultados foi executado o problema para três tipos de materiais diferentes e utilizaram-se as condições de contorno de temperatura dos dois lados e de um lado da barra.

V. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

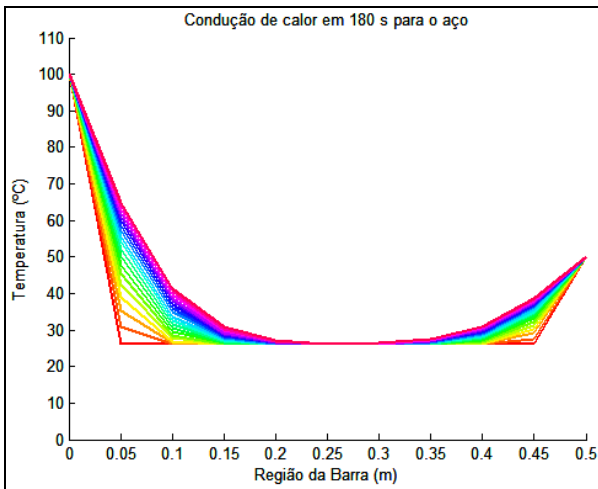
A simulação executada foi configurada para utilizar uma barra fixa de 50 cm de largura dividida em 10 pontos. Os materiais utilizados foram o aço, alumínio e vidro. A Tabela 2 apresenta as propriedades térmicas destes materiais.

Tabela II - Propriedades térmicas do aço, alumínio e vidro. Adaptado de [7]

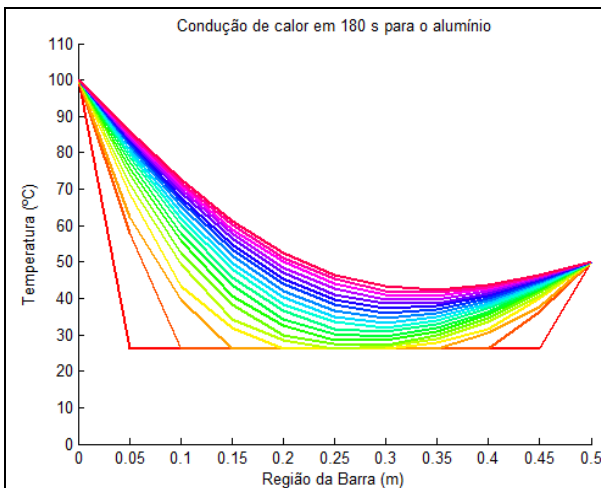
Material	Densidade ($\frac{kg}{m^3}$)	Condutividade Térmica ($\frac{W}{mK}$)	Calor Específico ($\frac{J}{kgK}$)
Aço	7780	52,00	396
Alumínio	2700	230,00	792
Vidro	2700	1,0	1.008

As temperaturas das condições de contorno foram atribuídas em 100 °C do lado esquerdo da barra e 50 °C do lado direito. A temperatura inicial da barra foi de 26 °C. Foi utilizado o tempo final da simulação igual a 180 segundos com passos de 10 segundos.

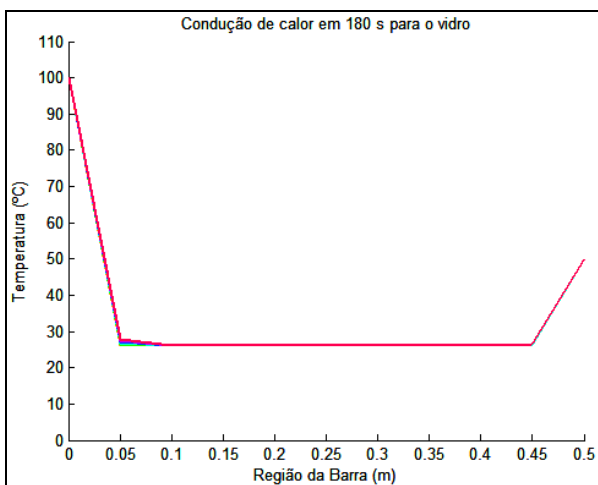
O resultado da simulação do cenário proposto é apresentado nos gráficos da Figura 4. O material que apresentou maior difusividade térmica foi o alumínio e o que possuiu a menor foi o vidro



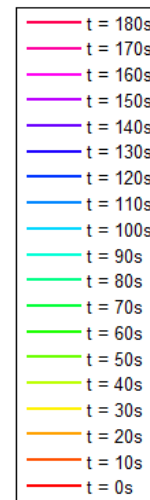
(a)



(b)



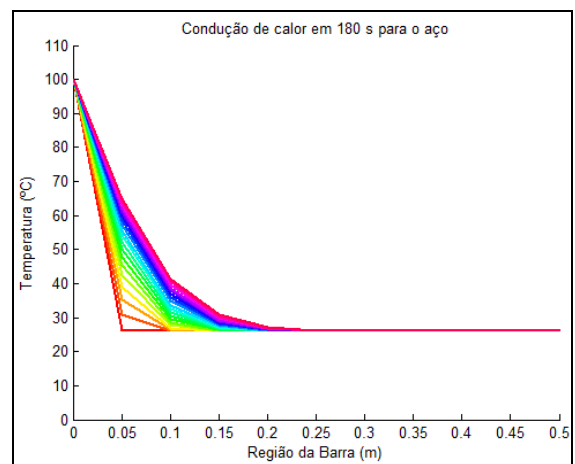
(c)



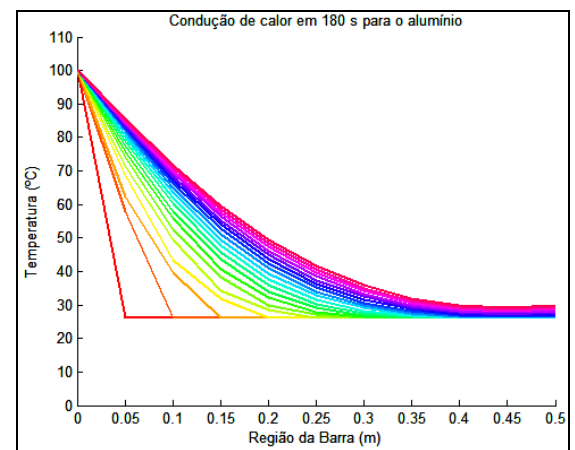
(d)

Fig. 4. Difusividade térmica com temperaturas de contorno do lado esquerdo e direito da barra. (a) Aço. (b) Alumínio. (c) Vidro. (d) Instantes de tempo relacionados nos gráficos.

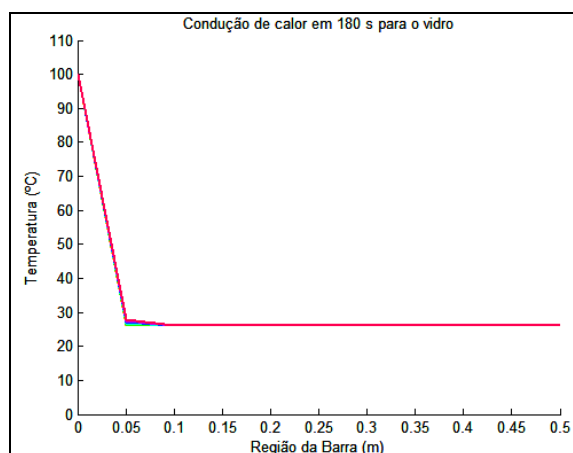
O outro experimento realizado utiliza somente a temperatura do lado esquerdo da barra como variável de contorno. As configurações do experimento anterior foram mantidas, os resultados são mostrados na Figura 5.



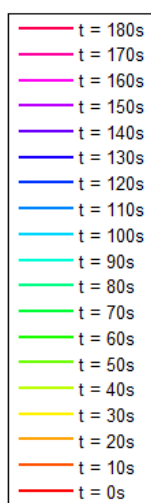
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 5. Difusividade térmica com temperaturas de contorno do lado esquerdo da barra. (a) Aço. (b) Alumínio. (c) Vidro. (d) Instantes de tempo relacionados nos gráficos.

Por meio da realização das simulações pode-se comprovar que as propriedades dos materiais influem no comportamento da difusividade térmica e comparando com ensaios de laboratórios, estes resultados correspondem aos fenômenos físicos [8].

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado um breve estudo sobre Equações Diferenciais Parciais com o objetivo de buscar um problema físico com esta característica. O problema físico abordado corresponde à difusividade térmica de uma barra composta por qualquer tipo de material, desde que as suas propriedades térmicas sejam conhecidas.

O tipo de EDP utilizada no problema é de segunda ordem com duas variáveis independentes, o tempo e a posição da barra. A EDP foi classificada como parabólica e a solução da equação foi realizada com a discretização do problema pelo método das diferenças finitas.

A solução implementada possibilita a flexibilidade na configuração do ambiente de simulação para as duas variáveis independentes e das propriedades do material utilizado. Os resultados obtidos por meio da simulação possibilitou

visualizar a propagação do calor ao longo da barra em intervalos de tempo sequenciais.

A codificação do problema pode ser aproveitada para a solução de outros problemas com a mesma característica, como por exemplo, problemas que envolvem evolução de espécies ou comportamento de concentra de compostos químicos. Basta que pequenos ajustes sejam realizados para adequar a EDP do modelo matemático a ser utilizado.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Mendelson and F. AYRES, *Teoria e problemas de cálculo*: BOOKMAN COMPANHIA ED, 1999.
- [2] D. V. Griffiths and I. M. Smith, *Numerical Methods for Engineers*: Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [3] W. E. BOYCE and R. C. DIPRIMA, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 8ª ed.: LTC, 2006.
- [4] C. Y. Shigue, "Equações Diferenciais Parciais," in *Material de Aula*, ed. Escola de Engenharia Elétrica - Universidade de São Paulo, p. 22.
- [5] M. S. Gockenbach, *Partial Differential Equations: Analytical and Numerical Methods*: SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS SIAM, 2002.
- [6] A. Kaw and E. E. Kalu, *Numerical Methods with Applications: Abridged*: Lulu.com, 2009.
- [7] PROTOLAB. 31/07/2013). Tabela de Condutividade e Difusividade. Available: http://www.protolab.com.br/Tabela_Condutividade_Efusividade.gif
- [8] C. G. MOTHE and A. D. DE AZEVEDO, *Análise Térmica de Materiais*: ARTLIBER, 2009.