



ANÁLISE DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTIMATIVA DO CRESCIMENTO DE INSTALAÇÕES DE GERADORES FOTOVOLTAICOS NO MUNICÍPIO DE SINOP-MT

Matheus Holzbach*¹, Adriana Souza Resende¹²

¹UNEMAT – Universidade do Estado de Mato Grosso

² FACET – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas

Resumo – O uso de geradores fotovoltaicos, para reduzir os custos com a fatura de energia elétrica, está aumentando em todo o país e o planejamento do sistema elétrico de potência considerando a inserção desse tipo de geração distribuída é fundamental. Em vista disso, o objetivo deste trabalho é analisar a aplicabilidade de três modelos matemáticos clássicos: Modelo de Malthus, Modelo de Verhulst e Modelo de Gompertz, para a estimativa do crescimento do número instalações de geradores fotovoltaicos, conectados ao sistema elétrico de distribuição, no município de Sinop-MT.

Palavras-Chave – Curva de Crescimento. Geração Distribuída Fotovoltaica. Modelos Matemáticos. Sinop-MT.

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS FOR ESTIMATING THE GROWTH OF PHOTOVOLTAIC GENERATORS INSTALLATIONS IN THE MUNICIPALITY OF SINOP-MT

Abstract - The use of photovoltaic generators to reduce the costs with the electric energy bill has been growing all over the country and the planning of the electric power system considering the insertion of this type of distributed generation is fundamental. Given that, the objective of this work is to analyze the applicability of three classic mathematical models: Malthus Model, Verhulst Model and Gompertz Model, for the estimative of the growth of the number of photovoltaic generators installations connected to the electrical distribution system in the city of Sinop-MT.

Keywords - Growth Curve. Mathematical Models. Photovoltaic Distributed Generation. Sinop-MT.

I. INTRODUÇÃO

A inserção de pequenos sistemas de geração distribuída (GD) no sistema de distribuição é uma realidade brasileira desde 2012 quando a Agência Nacional de Energia Elétrica

(ANEEL) publicou a Resolução Normativa N° 482, que possibilitou ao consumidor gerar sua própria energia através de fontes renováveis ou cogeração qualificada. Desde então, a Geração Distribuída Fotovoltaica (GDFV), tem ganhado espaço devido a economia agregada e a versatilidade de instalação.

Além disso, outro fator estimulante é o grande potencial brasileiro para o aproveitamento da energia solar sendo estimado entre 1.550 e 2.350 kWh/m²/ano [1]. A região Centro-Oeste do Brasil, ocupa a segunda melhor posição quanto ao índice de irradiação média global (5,7 kWh/m²/dia), possuindo ainda condições climáticas que conferem um regime estável de baixa nebulosidade e alta incidência de radiação solar [2].

O norte mato-grossense, em especial o município de Sinop, é destaque no número de instalações de sistemas de geração fotovoltaica conectados à rede elétrica, obtendo um crescimento de 514,35% nesse número entre os anos de 2018 e 2019 [3].

Contudo, observa-se na literatura que, a penetração massiva de GDFV pode ocasionar mudanças no sistema de distribuição, tais como, as variações dos níveis de tensão que afetam a vida útil dos componentes da rede, modificando a curva de carga e ocasionando perdas no alimentador [4]. Dessa forma, a previsão da tendência da curva de crescimento do número de instalações pode ser uma ferramenta valiosa para o planejamento e manutenção do sistema elétrico de potência [5].

Os modelos matemáticos compõem um conjunto de variáveis e relações matemáticas que representam um objeto analisado para o entendimento de seus fenômenos reais através de dimensão, unidade e medida [6], que podem servir para o processo de tomada de decisões, alocação ótima de recursos e previsão de eventos.

O uso de modelos matemáticos para a área de engenharia elétrica é encontrado na literatura em estudos de curvas de crescimento da demanda energética e em estimativas de previsão de produção de energia elétrica [7] [8]. Estas pesquisas possuem como objetivo agregar previsibilidade as alterações que possam ocorrer no âmbito do setor elétrico, sendo possível identificar quando as ações corretivas serão necessárias.

*matheus.holzbach@unemat.br

Dessa forma, o presente trabalho tem por objetivo analisar a aplicação de modelos matemáticos clássicos, utilizados em problemas de crescimento populacional, para estimativa do aumento de instalações de geradores fotovoltaicos no sistema elétrico de distribuição no município de Sinop-MT.

II. METODOLOGIA

Para o desenvolvimento e parametrização dos modelos aqui discutidos, foram consultados os dados de instalações de GDFV conectada à rede elétrica de distribuição, referentes ao município de Sinop-MT, por ano de instalação, no sistema de registro de GD da ANEEL. Considerou-se apenas o período temporal em que constam instalações registradas, a saber, os anos de 2016 à 2020, de acordo com a Tabela I.

Tabela I: Número de instalações de GDFV em Sinop-MT.

Ano de Conexão	Número de Instalações	Quantidade Acumulada
2015	0	0
2016	12	12
2017	20	32
2018	97	129
2019	558	687
2020	712	1399

Além disso, foram consultados os dados da concessionária local, Energisa Mato Grosso (EMT), referentes ao histórico do número de unidades consumidoras (UCs) ativas dentro do município, nos últimos dez anos, a fim de se determinar uma curva que pressuponha uma aproximação do limite máximo de instalações dentro do espaço observado. Vide a Tabela II.

Tabela II: Número de UCs ativas em Sinop-MT.

Ano de Conexão	Número de Unidades Consumidoras	Taxa de Crescimento
2011	44.895	-
2012	48.037	7,00%
2013	51.640	7,50%
2014	56.122	8,68%
2015	59.032	5,19%
2016	62.361	5,64%
2017	66.302	6,32%
2018	69.317	4,55%
2019	69.902	0,84%
2020	72.494	3,71%

A. Curva do Limite Máximo de Instalações

O uso de modelos de crescimento de populações logísticas contínuos, como de Verhulst e Gompertz, assume que em algum determinado momento a curva de crescimento tenderá a se estabilizar em um limite máximo suportável pelo ambiente, que chamamos de capacidade de suporte (K). Para instalações de geradores fotovoltaicos, conectados à rede de distribuição de energia elétrica, ocorre da mesma forma, pois para se realizar a conexão, conforme a normativa vigente,

resolução normativa N° 687/2015, o consumidor deve possuir uma unidade consumidora ativa.

Dessa forma, para resolução da equação característica dos modelos mencionados, a curva do limite máximo de instalações foi determinada a partir da aproximação dos dados da concessionária local, do número de unidades consumidoras ativas, supondo que todas estariam passíveis de receberem a instalação de geradores fotovoltaicos, apresentados na Tabela II.

A taxa média de crescimento do número de unidades consumidoras nos últimos 10 anos foi de 5,49%, e apresentou certa regularidade, apresentando uma variância de 0,05%, o que justifica a resolução por um modelo linear. O modelo escolhido foi o de regressão linear, onde é determinada uma equação condicional de uma variável y em função de valores dados por x , como na Equação (1).

$$y = Ax + B \quad (1)$$

Onde:

- y - Variável explicada (dependente).
- x - Variável explicativa (independente).
- A - Coeficiente angular da variável explicativa.
- B - Constante que representa a interceptação da reta com o eixo vertical.

Os valores de A e B podem ser encontrados por diversas abordagens como: Método dos mínimos quadrados, Mínimos quadrados ponderados, Máxima verossimilhança, Regularização de Tikhonov e Mínimo desvio absoluto. Para este trabalho, utilizou-se a técnica de regressão simples do método dos mínimos quadrados, sendo os parâmetros encontrados pelas Equações (2) e (3).

$$A = \frac{\sum xy - N \times \bar{x} \times \bar{y}}{\sum x^2 - N \times \bar{x}^2} \quad (2)$$

$$B = \bar{y} - A \times \bar{x} \quad (3)$$

Onde:

- N - Tamanho da amostra.
- xy - Produto dos dados amostrados de x e y .
- \bar{x} - Valor médio para o x amostrado.
- \bar{y} - Valor médio para o y amostrado.

B. Modelo de Malthus

O Modelo de Malthus ou modelo exponencial, foi criado pelo economista T. R. Malthus (An Essay on the Principle of Population, 1798) e originou a primeira proposta de utilização de modelos matemáticos para descrever crescimentos populacionais. Sendo que, por convenção, o modelo assume que o crescimento de uma população é proporcional ao número de indivíduos que a compõe em determinado instante, desconsiderando inibições de crescimento e limitações [6]. Matematicamente, pode ser descrito pela equação diferencial (4).

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \quad (4)$$

Para resolver a equação diferencial (4), deve ser aplicada a técnica de separação de variáveis, de acordo como descrito em [9], obtendo-se como resolução a equação (5).

$$P(t) = P_0 \times e^{\alpha t} \quad (5)$$

Onde:

- $P(t)$ - Representa a população em determinado tempo.
- P_0 - População inicial.
- α - Taxa de crescimento populacional.
- t - Tempo em anos.

C. Modelo de Verhulst

Também conhecido como modelo de crescimento logístico, o modelo de Verhulst é uma evolução do modelo exponencial, que foi formulado pelo belga P. F. Verhulst em 1837, em que é considerado que toda população está predisposta a sofrer inibições naturais em seu crescimento, devendo tender a um valor limite constante quando o tempo cresce [6].

A função logística foi amplamente utilizada na previsão de crescimento de populações humanas de diversos países nos séculos XIX e XX, justamente por ser um modelo mais significativo, sem que se atinjam valores extremamente altos em poucos anos, como o modelo de Malthus. A equação diferencial que o descreve pode ser observada na equação (6).

$$\frac{dP}{dt} = P \times (K - \alpha P) \quad (6)$$

Sua resolução, assim como no modelo de Malthus, é realizada por meio de separação de variáveis [10] resultando na equação (7).

$$P(t) = \frac{P_0 \times K}{P_0 + (K - P_0) \times e^{-\alpha t}} \quad (7)$$

Onde:

- $P(t)$ - Representa a população em determinado tempo.
- P_0 - População inicial.
- K - Capacidade de suporte limite.
- α - Taxa de crescimento populacional.
- t - Tempo em anos.

D. Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz aporta uma taxa de inibição da variável de estado, proporcional ao logaritmo desta variável, possibilitando dessa forma que a taxa de crescimento seja grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento. Este modelo, criado em 1825, é bastante adequado para representar crescimentos celulares biológicos [6].

Os modelos de Gompertz são amplamente utilizados no estudo da evolução de tumores sólidos (e cancerígenos). Neste caso, assume-se que a taxa de crescimento diminui quando a massa tumoral aumenta, as células centrais não recebem nutrientes e oxigênio suficientes para sua multiplicação [11].

A equação diferencial do modelo de Gompertz é dada pelo problema de Cauchy (originário de uma condição inicial), de acordo com a equação (8).

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \times \ln\left(\frac{K}{P}\right) \quad (8)$$

Para a resolução de sua equação diferencial ordinária é necessário utilizar a técnica de substituição de variáveis [5], resultando na equação (9).

$$P(t) = K \times e^{-\beta e^{-\alpha t}} \quad (9)$$

Onde:

- $P(t)$ - Representa a população em determinado tempo.
- K - Capacidade de suporte limite.
- β - Parâmetro de locação.
- α - Taxa de crescimento populacional.
- t - Tempo em anos.

E. Resolução dos Modelos

A resolução e parametrização dos modelos matemáticos de crescimento, que visam estimar o número de instalações de geradores fotovoltaicos conectados à rede elétrica de distribuição dos próximos anos no município de Sinop-MT, foi realizada na ferramenta Solver do *software* Excel desenvolvido pela Microsoft.

Essa ferramenta permite ao usuário definir uma função objetivo e que esta convirja para determinado valor, seja maximizado ou minimizado, alterando as células indicadas como variáveis. Além disso, a ferramenta também possibilita a inserção de restrições para melhor definição dos parâmetros a serem utilizados.

Quanto aos métodos de resolução do programa, existem três: LP simplex, GRG não linear e *Evolutionary*. O mecanismo LP simplex é indicado para resolução de problemas lineares, já o GRG não linear é utilizado na resolução de problemas como curvas suaves e não lineares e, por fim, o método *Evolutionary* serve para resoluções não suaves. Para este trabalho, o método escolhido foi o GRG não linear.

Uma maneira de determinar o quanto um modelo se ajusta aos dados amostrados é pelo coeficiente de determinação ou R^2 (R -quadrado). Essa medida varia entre 0 e 1, podendo ser expressa em termos percentuais. A métrica de ajuste do modelo estatístico, expressa a quantidade de variância dos dados e representa que quanto maior o valor do R^2 , mais ajustado aos dados ele está e dessa forma é considerado mais explicativo, de acordo com a equação (10).

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{Tot}}{SQ_{Res}} \quad (10)$$

Onde:

- R^2 - Coeficiente de determinação.
- SQ_{Tot} - Soma dos quadrados das diferenças entre a média e cada valor observado.
- SQ_{Res} - Erro quadrático médio entre os dados reais e os valores estimados.

A função objetivo escolhida a ser minimizada pela ferramenta do Solver foi o erro quadrático médio entre os dados reais e os valores estimados pelo modelo, apresentado na equação (11), para que os parâmetros como α que

representa a taxa de crescimento populacional do modelo fosse encontrada.

$$SQ_{Res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (11)$$

Onde:

- SQ_{Res} - Erro quadrático médio entre os dados reais e os valores estimados.
- y_i - Valor do dado real.
- \hat{y}_i - Valor estimado pelo modelo.

Foram utilizados os parâmetros de precisão da restrição de 1×10^{-6} e convergência de 1×10^{-4} como ajustes conforme predeterminação indicada pela *software*.

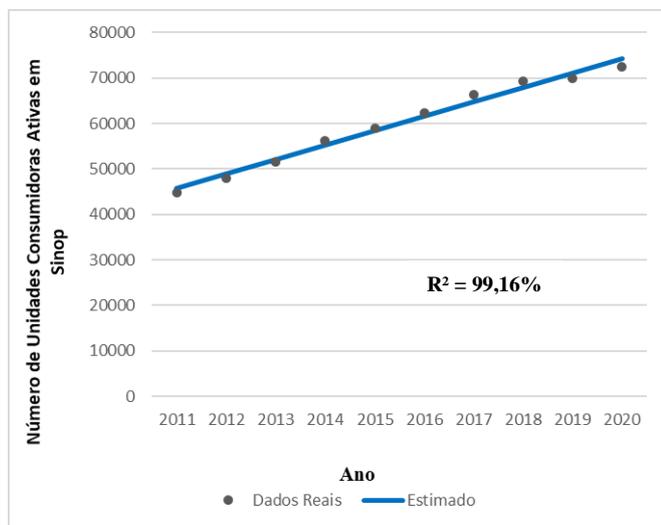
III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A. Capacidade de suporte

Levando em consideração os dados apresentados na Tabela II, a equação do limite máximo de unidades consumidoras foi modelada através da regressão linear pelas equações 2 e 3, encontrando-se as incógnitas A e B e resultando na equação de reta apresentada na equação (12), cujo gráfico, em relação aos dados reais, pode ser observado na figura 1.

$$UCs(t) = 3173,94t - 6337064,65 \quad (12)$$

Figura 1: Modelo para o número estimado de unidade consumidoras ativas para o município de Sinop-MT.



Esta equação descreverá o limite máximo possível considerado para instalações de geradores fotovoltaicos, conectados à rede elétrica no município de Sinop-MT, sendo atribuído ao valor de capacidade suporte (K) no instante t calculado para as equações logísticas.

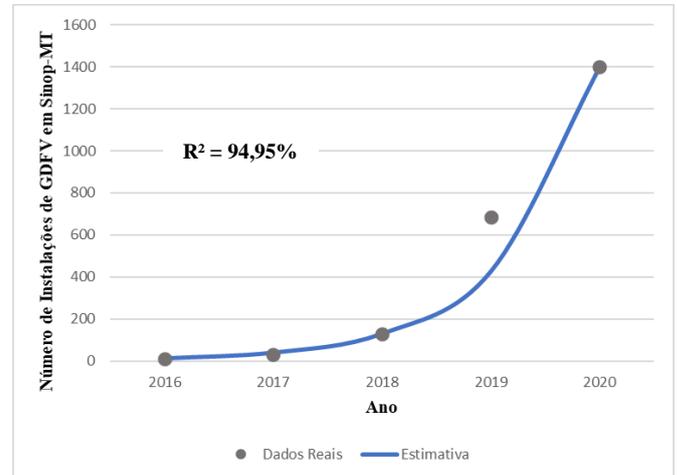
B. Modelo de Malthus

A taxa de crescimento populacional α foi estimada pelo Solver em 1,189652 para o modelo de Malthus, fazendo com que a equação a partir do número de instalações inicial, observada na Tabela I, seja representada pela equação (13).

$$P(t) = 12 \times e^{1,19 \times (2016-t)} \quad (13)$$

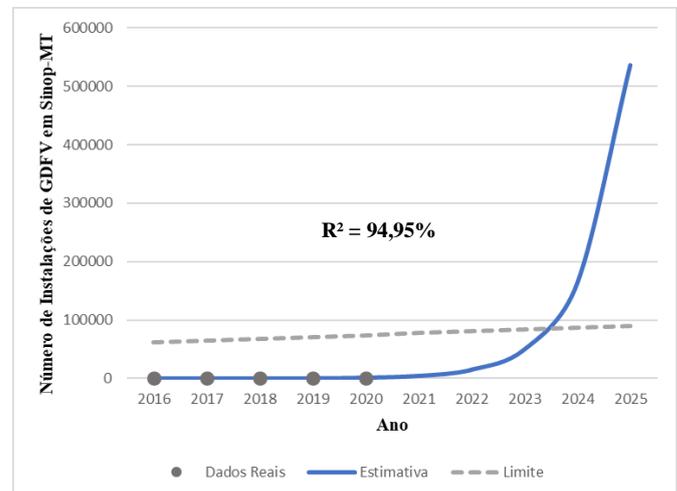
Dessa forma, os dados estimados pelo modelo representaram para o R^2 o valor de 94,95% em relação aos dados reais, de acordo com a figura 2.

Figura 2: Curva estimada e os dados reais para o modelo de Malthus.



Observa-se que o modelo deduziu valores aproximados aos reais para quatro dos cinco anos registrados, e que apenas no ano de 2019 houve discrepância nessa estimativa. Conforme o parâmetro t da equação avança para a previsão futura, o modelo exponencial tende a apresentar um crescimento rápido como observa-se na figura 3.

Figura 3: Variação do modelo de Malthus ao longo do tempo.



O número de instalações previsto para o município de Sinop-MT, pelo modelo de Malthus, indica um grande salto entre os anos de 2022 e 2023, ultrapassando a capacidade limite próximo ao ano de 2024 e partindo para valores irreais as condições supostas para o caso analisado.

C. Modelo de Verhulst

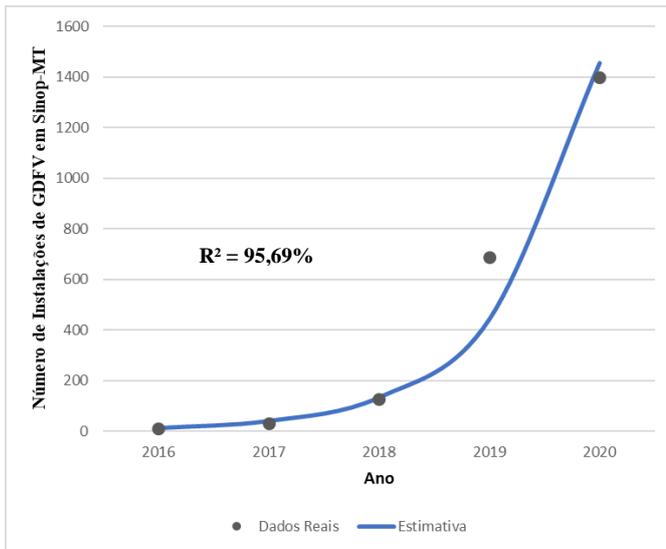
Já para o modelo de Verhulst, além da taxa de crescimento α e o número inicial de instalações é necessário determinar a capacidade de suporte limite do número de instalações, que neste caso foi descrito pela equação (12). Assim, de acordo a

equação (14), a ferramenta estimou uma taxa de crescimento de 1,204417.

$$P(t) = \frac{12 \times (3173,94t - 6337064,65)}{12 + ((3173,94t - 6337064,65) - 12) \times e^{-1,2 \times (2016 - t)}} \quad (14)$$

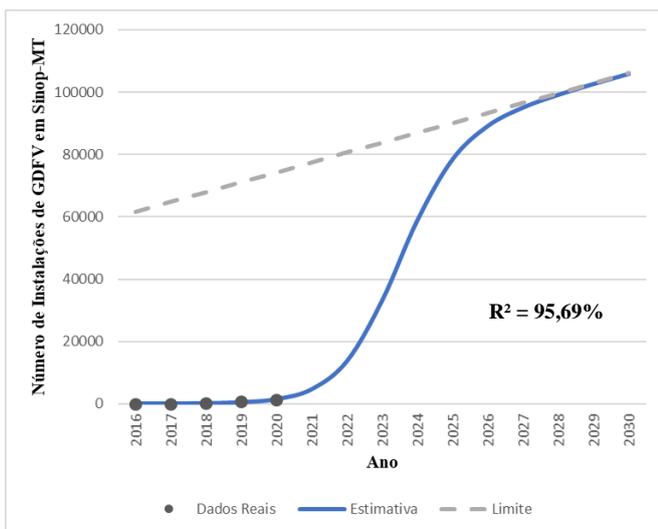
O modelo retornou valores estimados em relação aos dados reais em 95,69% para o R^2 , indicando melhor ajuste quando comparado com o modelo de Malthus, de acordo com a figura 4.

Figura 4: Curva estimada e os dados reais para o modelo de Verhulst.



Conforme observado na figura 4, existe certa discrepância no ano de 2019 e no ano de 2020, todavia, para este modelo o resultado se mostrou mais aproximado que o anterior.

Figura 5: Variação do modelo de Verhulst ao longo do tempo.



Conforme o parâmetro temporal aumenta, o modelo logístico de Verhulst tenta a capacidade de suporte do ambiente previamente determinada, apresentando dados

dentro do limite máximo, sem que este ultrapasse o número real previsto, representado na figura 5.

O modelo prevê que o número de instalações cresça a uma taxa muito alta entre os anos de 2023 à 2027 e que entre em regime junto a curva de capacidade máxima no ano de 2030. Em outras palavras, o modelo estima que até o final desta década todos os consumidores teriam geradores fotovoltaicos instalados.

D. Modelo de Gompertz

Os parâmetros α e β foram determinados pelo Solver do *software* Excel para composição da equação baseada no modelo de Gompertz, com os respectivos valores de 0,188064 e 12,226038, resultando na fórmula apresentada na equação 15.

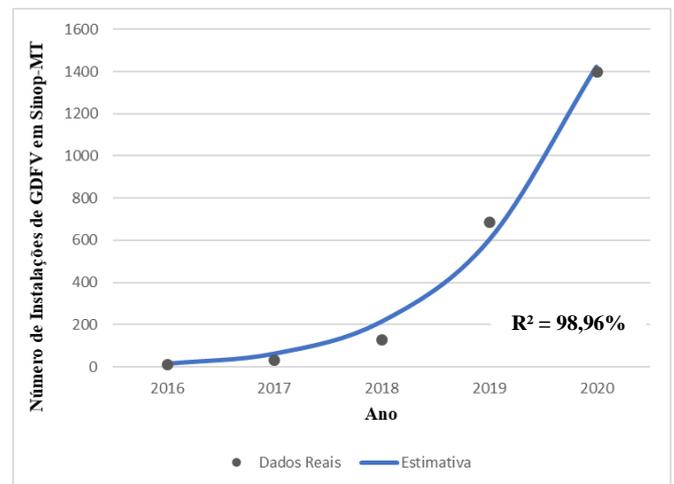
$$P(t) = (3173,94t - 6337064,65)e^{-12,23e^{-0,19 \times (2016 - t)}} \quad (15)$$

O modelo de Gompertz para a previsão de instalações de geradores fotovoltaicos em Sinop-MT apresentou o percentual de 98,96% para o R^2 , sendo dentre os modelos abordados o que teve uma estimativa de valores mais próxima dos dados reais.

Mesmo que o modelo tenha apresentado a maior diferença no ano de 2018 em relação aos demais, para o ano de 2019 o valor estimado ficou mais aproximado do dado real.

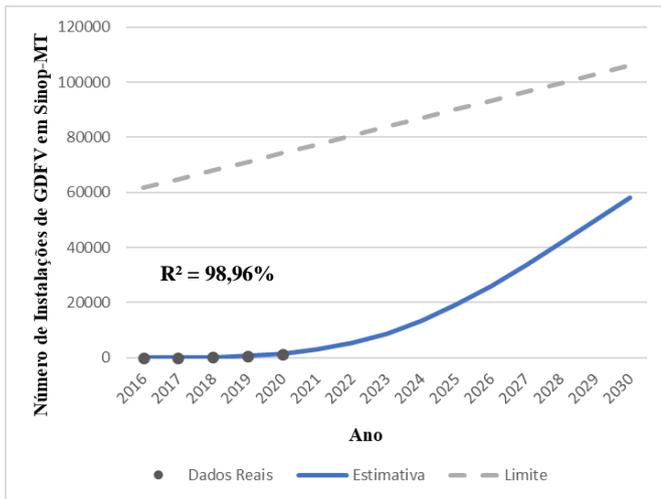
O gráfico dos valores estimados pelo modelo, em comparação com os dados reais de instalações de GDFV do município de Sinop-MT, pode ser observado na figura 6.

Figura 6: Curva estimada e os dados reais para o modelo de Gompertz.



Para a estimativa de instalações presentes nos próximos anos, o modelo de Gompertz, a partir dos parâmetros encontrados pelo *software*, obtém uma taxa de crescimento mais lenta e uma variação entre as taxas de crescimento mais uniforme que proporcionam uma curva mais suave, representando uma menor discrepância de valores entre um ano e outro, ilustrado na figura 7.

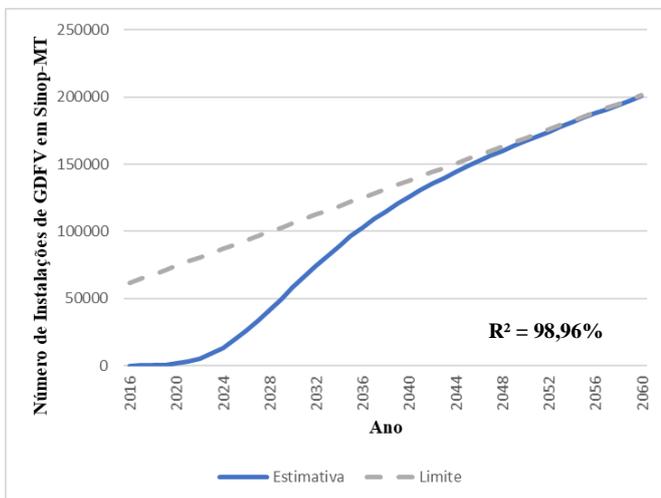
Figura 7: Variação do modelo de Gompertz ao longo do tempo.



Diferente dos outros modelos, até o ano de 2030 a estimativa prevê que apenas 55% da capacidade máxima de instalações seja alcançada.

Assim como no modelo logístico de Verhulst, nesta equação a curva estimada no infinito também tende a capacidade de suporte para instalações que é alcançada de forma lenta, aproximadamente no ano de 2093, a figura 8 representa o seu comportamento até o ano de 2060 quando a curva inicia a convergência a seu limite, sem que este seja extrapolado.

Figura 8: Variação do modelo de Gompertz tendendo ao limite máximo de instalações.



IV. CONCLUSÕES

Após análise dos modelos discutidos neste trabalho, observou-se que nenhuma das equações proporcionou uma estimativa igual aos dados reais coletados, contudo, todos os modelos apresentaram boa representatividade, sendo que o maior valor de R^2 ficou para o modelo de Gompertz.

Além disso, as curvas estimadas para o crescimento do número de instalações apresentaram grande variação entre os três modelos. O modelo de Malthus retornou valores

estimados acima do limite máximo, tornando suas estimativas inapropriadas para as condições consideradas.

Já o modelo de Verhulst, apresentou taxas de crescimento extremamente elevadas entre os anos de 2023 e 2027, com improvável aplicação para a estimativa do número de instalações por não descrever condições condizentes a realidade do município para este crescimento rápido.

Dentre os três modelos abordados neste trabalho, o modelo de Gompertz obteve a curva de crescimento mais suave e com as estimativas mais ajustadas aos dados reais, sendo que a sua estimativa pode considerada adequada até o ano de 2030 quando atinge 55% de sua capacidade máxima.

Nenhum dos modelos foi capaz de retratar fielmente a curva de crescimento de instalações de geradores fotovoltaicos no município de Sinop-MT, pois existem inúmeras condições que não puderam ser contempladas dentro de sua parametrização, como: a economia, a disponibilidade de matéria prima para a fabricação dos equipamentos, o poder aquisitivo dos consumidores e sua própria intenção de adquirir ou não este produto.

Dessa forma, o presente estudo identificou que os modelos abordados não apresentam uma aproximação favorável a utilização em virtude das diversas variáveis que não são consideradas. Outrossim, intui-se que a aplicação de modelos matemáticos mais complexos, como os predador-presa, e mais modernos que utilizem de inteligência computacional podem apresentar ferramentas mais interessantes na resolução da problemática proposta.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa de Mato Grosso (FAPEMAT), pelo apoio financeiro na realização desta pesquisa (processo 336869/2020).

REFERÊNCIAS

- [1] E.B. Pereira, F.R. Martins, S.L. Abreu and R. Rüther, "Atlas Brasileiro de Energia Solar," *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas*, São José dos Campos, 2006.
- [2] [7] L.K. Tsuruda, T.A. Mendes and M.B. Silveira, "A importância da energia solar para o desenvolvimento sustentável e social," *6th International Workshop Avances In Cleaner Production*, São Paulo, Brasil. 2017.
- [3] M. Holzbach and A.S. Resende, "Crescimento De Unidades Consumidoras com Geração Fotovoltaica Conectada à Rede Elétrica na Região Norte de Mato Grosso," *II Congresso de Energias Renováveis*, Sorocaba, 2021.
- [4] S.F. Abdelsamad, W.G. Morsi and T.S. Sidhu, "Probabilistic Impact of Transportation Electrification on the Loss-of-Life of Distribution Transformers in the Presence of Rooftop Solar Photovoltaic," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 6, no. 4, pp. 1565-1573, 2015.
- [5] Z.M. Alves, L.M. Cunico, G.M. Silva, G. Marchesan and G.C. Júnior, "Metodologias utilizadas na elaboração de cenários para simulações do sistema elétrico de potência com inserção de geração distribuída fotovoltaica," *13th Seminar on Power Electronics and Control*, Santa Maria, 2021.

- [6] R.C. Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*, Contexto, 3ª Edição, São Paulo, 2013.
- [7] C.A.C. Martins, Aplicação de Modelos Estatísticos à Previsão de Produção de Energia Elétrica, dissertação de mestrado, *Universidade Nova de Lisboa Lisboa*, Portugal. 2019.
- [8] L.T.P. Giarola, F.O. Tekanaka and R.C. Rocha, “Modelo aplicado à previsão da demanda de energia elétrica do campus I do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG),” *Revista da Estatística*, Ouro Preto, 2014.
- [9] J.S. Meira, G.O. Soares, J.M. Ebrenz, G.P. Brenner and I.B.M. Silvestre, “Modelo Malthusiano Aplicado Ao Crescimento Populacional do Município de Manoel Viana-RS,” *XX EREMAT*, pp. 3-6, Bagé, 2014.
- [10] D.G. Zill and M.R. Cullen, *Equações Diferenciais, Person*, 1ª Edição, Vol. 01, pp. 133-136, São Paulo, 2007.
- [11] R.C. Bassanezi, M.F. Leite and O. Rettori, “Um estudo evolutivo de tumores sólidos,” *Biomatemática IV*, pp. 1-7, Campinas, 1994.