



MODELAGEM E CONTROLE DE UM VEÍCULO ELÉTRICO AUTO-EQUILIBRADO

Kenji Fabiano Ávila Okada^{*1}

¹FEELT – Universidade Federal de Uberlândia

Resumo – O veículo elétrico auto-equilibrado é uma proposta de transporte rápido, leve e não poluente. Por apresentar não-linearidades e o problema regulador, a aproximação a um modelo linear do sistema e o projeto de um controlador são necessários. O trabalho propõe a modelagem desse sistema, em que as simplificações são discutidas, e o projeto do regulador linear quadrático (LQR). Requisitos de projeto são estabelecidos de forma a adaptar, da melhor forma possível, as características do usuário e as faixas de operação do veículo em situações reais de uso. Simulações no ambiente MATLAB/Simulink foram realizadas para validação do trabalho. Os resultados são discutidos propondo melhorias ao projeto e especificando as limitações de uso do sistema.

Palavras-Chave – Segway, modelagem, LQR

SELF-BALANCED ELECTRICAL VEHICLE MODELING AND CONTROL

Abstract – The self-balanced electrical vehicle is a fast, light and non-polluting transport proposal. Presenting nonlinearities and the regulatory problem, the approximation to a linear model of the system and the design of a controller are necessary. The paper proposes the modeling of this system, where simplifications are discussed, and the design of a quadratic linear regulator (LQR). Design requirements are established in such a way to best adapt the user characteristics and the vehicle operating ranges to the real use situations. Simulations in the MATLAB/Simulink environment were performed to validate the work. The results are discussed by proposing improvements to the project and specifying the limitations of using the system.

Keywords – Segway, modeling, LQR.

NOMENCLATURA

v (m/s)	Velocidade horizontal do sistema
a (m/s ²)	Aceleração horizontal do sistema
r (m)	Raio da roda
Mt (kg)	Massa total do sistema
F (N)	Força resultante do sistema

*kenji_okada09@hotmail.com

T (N.m)	Torque total resultante nas rodas
Td (N.m)	Torque resultante na roda direita
Tg (N.m)	Torque resultante na roda esquerda
Iw (kg.m ²)	Inércia rotacional
I_p (kg.m ²)	Inércia total do pêndulo
θ (rad)	Ângulo de inclinação
Φ (rad)	Ângulo de giro
M (kg)	Massa do usuário
k	Coefficiente de atrito aerodinâmico
g (m/s ²)	Aceleração da gravidade
z (m)	Deslocamento horizontal
m (kg)	Massa da roda
L (m)	Distância do centro de massa do pêndulo
r (m)	Raio da roda
w (rad/s)	Velocidade angular
l (m)	Largura da base do veículo
Li (H)	Indutância
I (A)	Corrente elétrica
R (Ω)	Resistência elétrica
V (V)	Tensão elétrica

I. INTRODUÇÃO

A necessidade de locomoção a partir de sistemas de transporte rápidos e leves estão se tornando cada vez mais necessários para solucionar o problema de mobilidade urbana [1]. Uma proposta desse tipo de sistema de transporte, que ficou largamente conhecido, é o Segway. O Segway original foi inventado por Dean Kamen dos Estados Unidos da América e lançado em 2001 [2]. Ele é um veículo elétrico de duas rodas auto-equilibrado, baseado na estabilização de um pêndulo invertido [3].

A proposta desse veículo é fornecer um meio de transporte para curtas distâncias e que não seja poluente. Por esse motivo, é atualmente utilizado em situações como: patrulhas policiais, inspeção de armazéns, entrega de cargas leves, transporte pessoal, lazer etc [4].

O veículo auto-equilibrado tem se tornado um alvo de interesse para a área de controle por possuir características não-lineares [1] e a necessidade de resolução do problema regulador, uma vez que o movimento do sistema é baseado em uma perturbação na inclinação do usuário, ocasionada por este. Alguns métodos de controle tem sido utilizados, como o PID [1-3] e a lógica fuzzy [4].

O objetivo deste trabalho é apresentar uma abordagem de modelo do sistema levando em consideração as suas faixas de

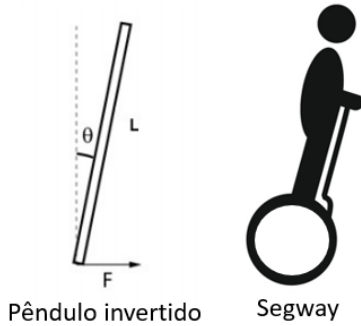
operação e as características do usuário, contemplando assim, situações reais de uso do veículo. Simplificações nas equações são demonstradas, afim de justificar a possibilidade de utilização de um modelo linear. Além disso, é proposto o método do controle ótimo linear quadrático (LQR), devido a sua simplicidade de projeto e sintonização.

O artigo é dividido da seguinte maneira: a Seção 2 corresponde ao modelo analítico do sistema e a sua aproximação linear. A Seção 3 corresponde ao dimensionamento do sistema, utilizando valores de parâmetros que melhor correspondem à realidade do veículo. A Seção 4 é o projeto do controlador e a Seção 5 os resultados obtidos a partir de simulações no ambiente MATLAB/Simulink.

II. MODELAGEM DO SISTEMA

O Segway é um veículo elétrico de duas rodas e auto-equilibrado, em que a base do dispositivo mantém o Segway na posição vertical e o usuário dirige o veículo a partir da sua inclinação na direção em que deseja seguir [4]. Teoricamente, o problema de equilíbrio de um Segway é semelhante à de um pêndulo invertido. A Figura 1 descreve a situação.

Figura 1: Princípio do Segway



Para o modelo e dimensionamento do veículo auto-balanceado, foi estabelecido requisitos que abrangem características do usuário e do próprio sistema, afim de impor limites de operação e conseqüentemente, manter segurança e conforto à pessoa. A Tabela 1 inclui os requisitos selecionados.

Tabela 1: Requisitos de dimensionamento e controle do sistema

Variável	Requisito
Massa do sistema	< 45 kg
Diâmetro da roda	0.3 a 0.5 m
Massa do usuário	30 a 120 kg
Velocidade longitudinal	< 20 km/h
Aceleração longitudinal	< \$g/3\$
Ângulo de inclinação	< 20°

O sistema pode ser compreendido a partir das equações não-lineares correspondentes ao movimento desenvolvido em torno do seu próprio eixo vertical, ao movimento de inclinação (dinâmica do pêndulo) e ao deslocamento horizontal, Equações 1, 2 e 3 respectivamente.

$$Iw.\ddot{\Phi} = \frac{l}{2r} \cdot (Td - Tg) \quad (1)$$

$$Ip.\ddot{\theta} = M.g.L.\sin(\theta) - M.\dot{z}.L.\cos(\theta) \quad (2)$$

$$Mt.\dot{z} = F - K.z^2 - M.\ddot{\theta}.L.\cos(\theta) + M.\dot{\theta}^2.L.\sin(\theta) \quad (3)$$

Observa-se que a alteração de usuário ocasiona modificações nas constantes das equações do sistema, como a massa, o centro de massa e a inércia. Essas modificações serão consideradas como perturbações do sistema no sentido de que, de acordo com os requisitos da Tabela 1, o controlador deverá evitar a instabilidade do sistema na alteração desses parâmetros.

Os motores elétricos do veículo serão os responsáveis por desenvolver o torque de cada roda, logo, a aceleração responsável por equilibrar o pêndulo e a velocidade para o deslocamento horizontal. A diferença de torque entre as rodas ocasiona o giro do veículo em torno do seu próprio eixo, Equação 1. A equação que define o comportamento mecânico de um motor DC é dada pela Equação 4.

$$\dot{w} = T_{motor} - T_{carga} \quad (4)$$

A Equação 5 define as características elétricas do motor DC.

$$Li.\frac{di}{dt} = V - R.I - \frac{J_{motor}}{I} \quad (5)$$

No projeto de um controlador, é importante que o modelo seja o mais simples possível desde que comporte as dinâmicas do sistema que se deseja controlar, e que as componentes negligenciadas não influenciem consideravelmente na resposta do sistema. Por esse motivo, as Equações 1, 2 e 3 podem ser simplificadas, a ponto de transformar os termos não-lineares em lineares em faixas de operação e facilitar o projeto do controlador.

O ângulo de inclinação \$\theta\$ é limitado a uma faixa de 0 a 20°. Nesta faixa, pode-se considerar a aproximação da Equação 6.

$$\sin(\theta) \cong \theta \text{ e } \cos(\theta) \cong 1 \quad (6)$$

Junto a isso, considerando que o usuário não vá variar instantaneamente sua inclinação, a Equação 7 pode ser definida.

$$\dot{\theta} \cong \ddot{\theta} \cong 0 \quad (7)$$

As Equações 8, 9 e 10 estão relacionadas à aceleração, à força resultante desenvolvida no sistema e ao torque total desenvolvido pelas rodas.

$$\dot{z} = \dot{v} = a \quad (8)$$

$$F = Mt.a \quad (9)$$

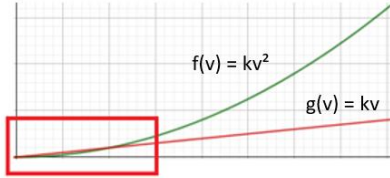
$$T = F.r = T_d + T_g \quad (10)$$

A partir dessas equações, é possível representar o segundo termo da direita da Equação 2 a partir da Equação 11.

$$-M.l.\cos(\theta) = -\frac{M.l}{Mt.r} \cdot (T_d + T_g) \quad (11)$$

Outro ponto a ser discutido é a relação entre as funções $k \cdot v^2$ e $k \cdot v$ (segundo termo da direita da Equação 3), mostrado na Figura 2. Nota-se que para pequeno valor de velocidade, como o definido nos requisitos da Tabela 1, os dois gráficos são próximos um do outro. Por essa razão, a função de $k \cdot v^2$ pode ser linearizada como $\bar{k} \cdot v$, onde \bar{k} é o coeficiente estimado de fricção aerodinâmica.

Figura 2: Comparação entre o modelo não-linear e linear



A partir das Equações 6-11, obtém-se o novo modelo linear aproximado do sistema, Equações 12-14.

$$I_w \cdot \ddot{\phi} = \frac{1}{2 \cdot r} \cdot (T_d - T_g) \quad (12)$$

$$I_p \cdot \ddot{\theta} = M \cdot g \cdot L \cdot \theta - \frac{M \cdot L}{M_t \cdot r} \cdot (T_d + T_g) \quad (13)$$

$$M_t \cdot \dot{v} = \frac{1}{r} \cdot (T_d + T_g) - \bar{k} \cdot v \quad (14)$$

Para a representação em espaço de estados do sistema, Equação 15, não foi levado em consideração o estado ϕ , por não apresentar utilidade e nem prejudicar a análise do sistema.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ v \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} T_d \\ T_g \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{Mgl}{I_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\bar{k}}{M_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l}{2rI_w} & \frac{-l}{2rI_w} \\ 0 & 0 \\ \frac{-LM}{I_p r M_t} & \frac{-LM}{I_p r M_t} \\ \frac{1}{r M_t} & \frac{1}{r M_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_d \\ T_g \end{bmatrix}$$

Nota-se que neste caso, as entradas do sistema são os torques das rodas desenvolvidas pelo motor elétrico, e por essa razão, a verdadeira entrada do processo seria a tensão elétrica aplicada aos motores. As Equações 4 e 5 representam parte da dinâmica do motor. No entanto, para efeito de simplificação das análises do comportamento do sistema em malha aberta e fechada, optou-se por manter o modelo do sistema como na Equação 15.

III. DIMENSIONAMENTO DO SISTEMA

Os valores dos parâmetros do modelo são definidos pela Tabela 1, para que se possa realizar a análise de controlabilidade, observabilidade e o projeto do controlador para o sistema.

O sistema é composto por quatro estados: $\phi, \theta, \dot{\theta}$ e v . Para a medição da posição angular, como o segundo estado, existem diversos recursos, como o encoder incremental. Utilizando a mesma tecnologia, é também possível, a partir de programas, para um controle discreto, calcular a velocidade angular através da diferença entre os valores atual e anterior da posição dividido pelo período de amostragem. Portanto, o terceiro estado pode ser medido sem que haja a necessidade de um sensor extra.

Tabela 2: Valores utilizados para os parâmetros do sistema

Parâmetro	Valor Nominal	Faixa	Observações
Raio da roda (m)	0.2	0.15-0.25	Especificado na Tabela 1
Massa do usuário (kg)	75	30-120	Especificado na Tabela 1
Largura da base (m)	0.5	0.4-0.6	Média da largura humana
Massa do veículo (kg)	45	0-45	Para englobar a massa dos motores e da bateria
Comprimento da haste do veículo (m)	0.95	0.8-1.10	Faixa adequada para acomodar usuários com 1.5 a 2.3m de altura
Densidade do ar (kg/m³)	1.2	1.16-1.22	Esta faixa engloba diversas situações de temperatura, humidade e altitude
Coefficiente de arrasto (-)	0.82	0.8-1.05	Valor nominal referente a forma cilíndrica, mais próxima a forma humana.
Velocidade média (m/s)	10	0-20	Utilizada para obter o coeficiente de fricção aerodinâmica

Um ponto importante é que o sistema só se tornou observável a partir da medição do primeiro, segundo e quarto estado ou dos quatro estados. As duas opções são descritas pela Equação 16.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ v \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ v \end{bmatrix} \quad (16)$$

Devido à simplicidade de medição das saídas a partir dos encoder's incrementais e o mesmo número de sensores necessários em ambas as opções, a segunda opção foi utilizada para simplificar o problema de controle, uma vez que não implicará o projeto de um observador de estados.

IV. PROJETO DO CONTROLADOR LINEAR QUADRÁTICO

Utilizando a representação em espaço de estados da Equação 15, a matriz de controlabilidade calculada possui posto igual ao posto da matriz A, logo, as entradas do sistema são capazes de alterar os estados em um tempo finito, sendo possível o projeto de um controlador.

O LQR foi selecionado para o sistema por apresentar características de realimentação de estados (todos são medidos), de controle ótimo e de simples projeto e sintonia.

Para o sistema contínuo, a lei de realimentação definida pelo controlador 'K' a partir da Equação 17 é definida a partir da minimização da função de custo da Equação 18 sujeito às

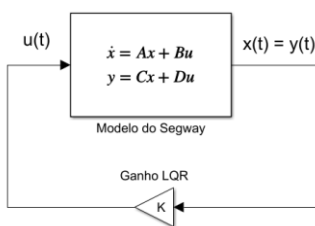
dinâmicas do sistema, representado pela Equação 15, onde ‘u’ representa a entrada e ‘x’ os estados do sistema.

$$u = -K.x \quad (17)$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T.Q.x + u^T.R.u)dt \quad (18)$$

As matrizes Q e R são matrizes diagonais de peso relacionadas a cada estado e a cada entrada, respectivamente. Os valores dos seus componentes matriciais são escolhidos de forma a ajustar a resposta do sistema, ponderando estados e entradas individualmente na Equação 18. A Figura 3 é o diagrama de blocos do sistema de controle. Como neste caso o problema é atenuar as perturbações de forma a sempre forçar os estados a valores nulos, não é necessário um sinal de referência para a saída.

Figura 3: Sistema de controle do Segway



Na abordagem discreta, o controlador é projetado baseado também no período de amostragem. A margem de atraso é útil em determiná-lo porque especifica a quantidade de tempo de atraso que pode ser adicionado ao sistema antes que ele se torne instável. Neste trabalho, a menor margem de atraso obtida é de 170 ms. Optando por um valor de no mínimo dez vezes inferior à margem, o período de amostragem definido é de 10 ms.

V. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o intuito de validar o sistema projetado, foram realizadas três simulações, cada uma relacionada a uma equação dinâmica do processo, Equação 1-3.

Neste problema, o sistema estará inicialmente em seu ponto de equilíbrio definido por $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, e o objetivo de controle é atenuar a perturbação em θ , ocasionada pela inclinação do usuário com o intuito de deslocar o veículo. Além disso, é importante analisar em cada resposta se as variáveis estão dentro das faixas estabelecidas nos requisitos da Tabela 1. Por esse motivo, para as simulações 1 e 2, variou-se o ângulo θ de -20° a 20° . Todas as simulações são dadas em função do tempo em segundos e as ordenadas possuem unidades de acordo com a variável representada.

A Figura 4 e 5 são os resultados obtidos da simulação 1, na análise da Equação 2 ligadas à dinâmica do pêndulo invertido, em que pulsos em θ foram acionados à variável afim de perturbar o sistema.

Os pulsos em θ são, como perturbações, atenuados a partir do deslocamento do veículo quando se impõe aceleração ao sistema gerada pelos torques nas rodas até que se atinja novamente o equilíbrio. Neste caso, o estado ligado ao ângulo de giro não é influenciado pelas variações em θ .

A velocidade manteve-se na faixa de requisitos, no entanto, a aceleração obteve um pico correspondendo a quase 100% do valor máximo desejado. Esse problema é devido a simulação das perturbações em θ como pulsos, variando instantaneamente, contrapondo ao que foi estabelecido na Seção 2, sobre os processos de simplificação do modelo.

Figura 4: Simulação 1

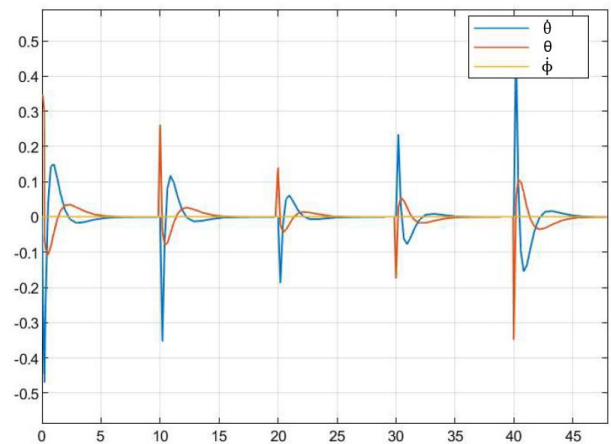
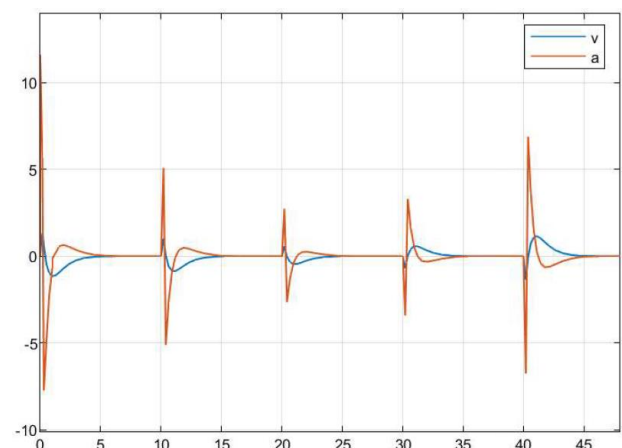


Figura 5: Simulação 1



A simulação 2, correspondendo as Figuras 6 e 7, mostram o comportamento do sistema em um deslocamento retilíneo, quando a perturbação em θ é mantida constante.

Figura 6: Simulação 2

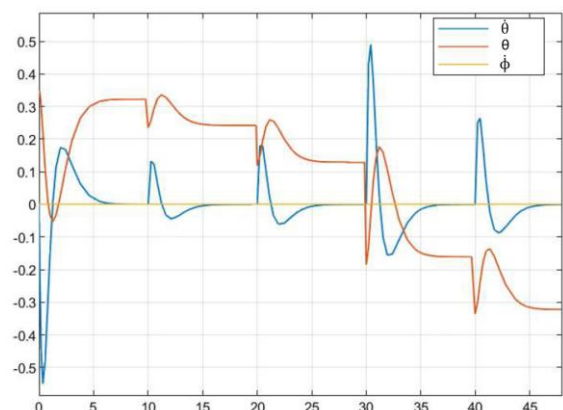
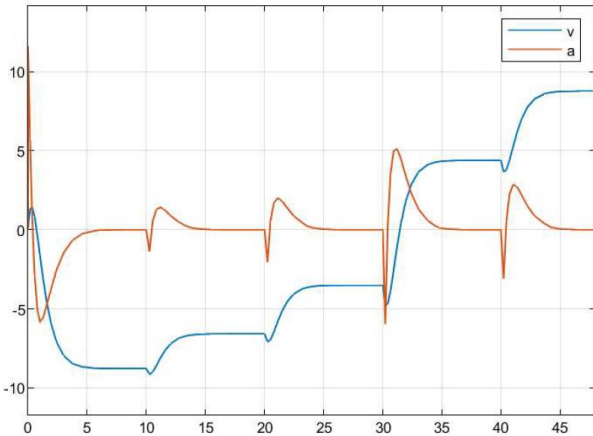


Figura 7: Simulação 2



De acordo com os resultados da simulação 2, nota-se que para valores constantes de $\theta \neq 0$, o sistema adquire aceleração nula e velocidade não nula e constante. Isso mostra que $\dot{\theta}$ é o responsável pela aceleração do sistema, proporcionando ao usuário um controle simples do deslocamento.

Nesta simulação, tanto a velocidade quanto a aceleração adquiriram valores fora das faixas desejadas. Por esse motivo, dependendo do motor elétrico utilizado, caso ele consiga atingir os valores da Figura 7, é necessário que haja por hardware ou software, um limitador à tensão aplicada aos motores.

A simulação 3, Figuras 8 e 9, estão relacionadas à Equação 1 do sistema. Neste caso, alterou-se o valor da referência do sistema para apenas uma das rodas, como forma de representar o intuito do usuário em se deslocar em função de Φ .

O deslocamento em Φ é gerado quando se há uma diferença de torque entre os torques em cada roda. Esse movimento, como pode ser observado nas Figuras 8 e 9, não ocasiona mudanças significativas nas outras variáveis.

Figura 8: Simulação 3

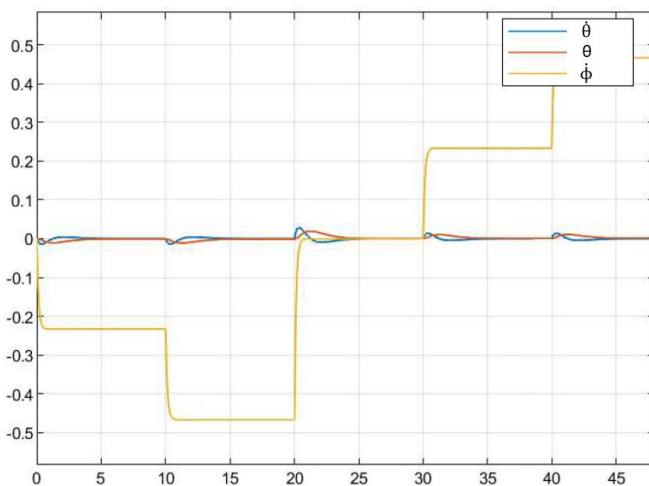
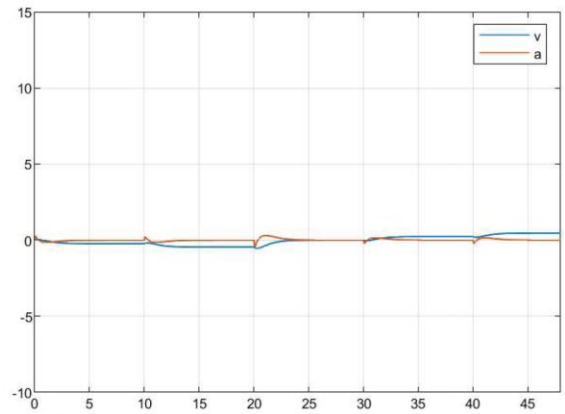


Figura 9: Simulação 3



VI. CONCLUSÕES

A modelagem e o controle do veículo elétrico auto balanceado foi realizado com o intuito de aproximar as características reais de uso, tanto no quesito das características do usuário quanto em relação às especificações de operação do sistema. De acordo com os resultados obtidos, constata-se que as dinâmicas corresponderam ao esperado, além de que as não-linearidades, que foram aproximadas, não resultaram em instabilidade ou degradação significativa da performance da resposta do sistema.

Adicionando a este trabalho as especificações dos motores elétricos, como massa, potência elétrica, máximo torque capaz de desenvolver, e a da bateria, relacionadas à massa e ao tempo de autonomia, o modelo do processo se totaliza, uma vez que será adicionado a Equação 15 todos esses parâmetros, além de estabelecer novas restrições de operação ao sistema. O microcontrolador terá relevância apenas no período de amostragem e sua capacidade em processar todas as informações dos sensores e dos sinais de controle.

Outra possibilidade de aprimoramento do trabalho é a utilização dos piores casos dos parâmetros da Tabela 2, e não apenas θ como foi realizado aqui. Isso representaria uma análise robusta do sistema, garantindo estabilidade e performance para os diferentes tipos de usuários, ambientes, e situações do veículo.

REFERÊNCIAS

- [1] J. V. Melo, *Identificação e controle de um veículo segway para fins educacionais*, XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Porto Alegre – RS, 2017
- [2] M. U. Draz, M. S. Ali, M. Majeed, U. Ejaz and U. Izhar, *Segway electric vehicle*, International Conference of Robotics and Artificial Intelligence, Rawalpindi, pp. 34-39, 2012.
- [3] W. Younis, M. Abdelati, *Design and implementation of an experimental segway model*, 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation, Tunísia, Volume 1107, pp. 350-354, 2009.
- [4] G. K. Kiyohara, *Projeto do controle de um veículo elétrico de duas rodas coaxiais para portadores de paraplegia utilizando lógica difusa*, Trabalho de conclusão de curso, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2011.