



PROPAGAÇÃO EM UM MEIO IONIZADO ISOTRÓPICO

Andreia C. Domingos¹, Alexandre C. Mateus¹, Luciano X. Medeiros¹,

¹FEELT – Universidade Federal de Uberlândia

Resumo - O Este artigo apresenta métodos de cálculo aproximado do campo de uma onda eletromagnética que se propaga na ionosfera. A ionosfera é uma camada com meio anisotrópico (com dois índices de refração, N). A complexidade para solução de equações diferenciais, para o cálculo do campo de uma onda eletromagnética na ionosfera, ocorre devido a densidade eletrônica, que varia com as estações do ano, e principalmente com a hora do dia, influenciada principalmente pela existência do campo magnético terrestre.

Quando se despreza o campo magnético terrestre, a ionosfera comporta-se como meio isotrópico facilitando desta forma a solução das equações diferenciais que governam o campo; podendo ser resolvidas por funções conhecidas como as funções de Airy [6] modelo linear.

Palavras-Chave – Propagação, isotrópico, Eletromagnética Ionosfera, , Diferenciais., Airy,

PROPAGATION IN ISOTROPIC IONIZED MEANS.

Abstract - This article presents methods of approximate field calculation of an electromagnetic wave propagating in the ionosphere. The ionosphere is an anisotropic medium layer (with two refractive indices, N). The complexity of solving differential equations for the field calculation of an electromagnetic wave in the ionosphere is due to the electronic density, which varies with the seasons, and especially with the time of day, mainly influenced by the existence of the terrestrial magnetic field. .

When the terrestrial magnetic field is neglected, the ionosphere behaves as an isotropic medium, thus facilitating the solution of the differential equations that govern the field; can be solved by functions known as the Airy functions [6] linear model.

Keywords - Propagation, electromagnetic, isotropic, ionosphere, differential, Airy.

I. INTRODUÇÃO

A ionosfera é uma camada ionizada, situada entre 60 a 600 km de altitude, e pode ser caracterizada através da densidade eletrônica [1] (elétrons/cm³) pela constituição gasosa (moléculas/cm³), pelo gradiente de temperatura (°K), e pela variação de pressão em relação a altitude (N/m²). E divide-se em 4 (quatro) camadas: Camada D (entre 60 e 90 km), camada E (entre 90 e 180 km), camada F₁ (entre 180 e 250 km) e camada F₂ (entre 250 e 300 km), conforme a Figura 1

A densidade eletrônica, N , é sua principal característica, e fornece a concentração de elétrons livres por unidade de volume em cada ponto da atmosfera terrestre. Ela surge de um processo de ionização dos gases atmosféricos, quando as radiações solares atingem a superfície da Terra. O sol é o principal agente ionizante, e a densidade atinge valores máximos aproximadamente ao meio dia (com pico de 300 km de altitude) e valores mínimos durante a noite, chegando a desaparecer a camada D.

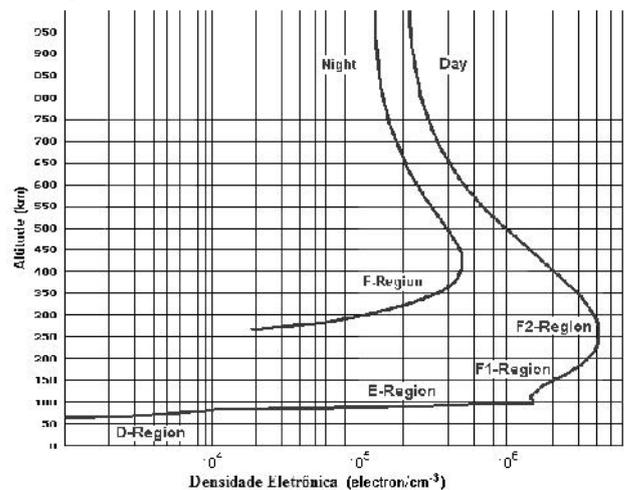


Figura. 1. Distribuição da Densidade eletrônica, N em relação com a altitude [1].

As equações que regem os fenômenos de propagação ionosférica, os mais usados são as equações de Maxwell [2], como outras expressões derivadas da mesma (relações constitutivas).

A Figura 2, mostra o sistema e suas coordenadas, para o campo eletromagnético cujas as variações no tempo são do tipo $e^{i\omega t}$.

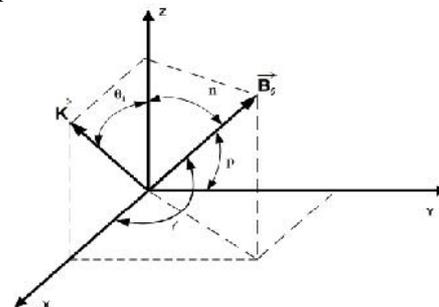


Figura 2. Gráfico de coordenadas do campo.

Onde $\vec{Y} = e\vec{B}_0 / (m\omega)$;

\vec{K} é a direção da frente de onda;

\vec{B}_0 é a indução magnética terrestre;



θ_i é o ângulo de incidência;

n é o cosseno do ângulo entre o vetor \vec{Y} e o eixo z ;

p é o cosseno do ângulo entre o vetor \vec{Y} e o eixo y ;

l é o cosseno do ângulo entre o vetor \vec{Y} e o eixo x .

Considera-se a onda plana incidente na ionosfera no sentido de baixo para cima, com sua normal ao plano de propagação em $x-z$, faz um ângulo θ_i com a vertical, assim mostra-se que para uma ionosfera paralelamente estratificada, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} = -ik_0 \sin \theta_i; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Mas

$$S = \sin \theta_i, \quad C = \cos \theta_i, \quad k_0 = 2\pi / \lambda_0 = \omega / c, \quad c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} \quad (2)$$

Sendo que c , λ_0 , k_0 são respectivamente a velocidade da luz, comprimento de onda e a constante de propagação da onda no espaço livre.

A Equação (4), mostra que não há variações de onda com x , nem com a onda em y , para o caso de uma ionosfera paralelamente estratificada. Somente há variações de campo com a onda em z , e pode-se substituir $(\partial / \partial z)$ por (d / dz) no conjunto de Equações (3) e (4). Com as substituições adequadas, chega-se ao resultado:

$$\begin{aligned} \frac{dE_y}{dz} &= ik_0 H_x, & -\frac{dH_y}{dz} &= i \frac{k_0}{\varepsilon_0} D_x \\ \frac{dE_x}{dz} + ik_0 S E_z &= ik_0 H_y, & \frac{dH_x}{dz} + ik_0 S H_z &= \frac{ik_0}{\varepsilon_0} D_y \\ ik_0 S E_y &= ik_0 H_z, & -ik_0 S H_y &= \frac{ik_0}{\varepsilon_0} D_z \end{aligned} \quad (3)$$

Onde $\vec{H} = Z_0 \vec{H}$; $Z_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$;

Z_0 é a impedância característica do espaço livre.

II. METODOLOGIA

A. Relações Constitutivas

A Equação para o movimento de elétrons na ionosfera é dada por

$$\vec{E}e + e \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \vec{B}_0 = m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + m\nu \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (4)$$

Onde

\vec{r} é o vetor de deslocamento;

t é o tempo

m é a massa do elétron;

e é a carga do elétron;

ν é a frequência média de colisões.

Supõe que o campo aplicado tenha uma variação com o tempo dado por $e^{i\omega t}$, e N o número de elétrons por unidade de volume, a Equação (4) é reescrita

$$\frac{Ne^2}{m\omega} \vec{E} + \frac{ic}{m\omega} \vec{P} \times \vec{B}_0 = -\vec{P}(1 - \frac{i\nu}{\omega}) \quad (5)$$

Mas $Z = \nu / \omega$, $\vec{Y} = e / m\omega$. Assim, a Equação (6)

$$-\varepsilon_0 \vec{E} = (1 - iZ) + i\vec{P} \times \vec{Y} \quad (6)$$

Mas $U = (1 - iZ)$, $Y = |\vec{Y}|$, $X = Ne^2 / (\varepsilon_0 m \omega^2)$.

Chega-se as relações constitutivas

$$-\varepsilon_0 X \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & inY & -ipY \\ -inY & U & ilY \\ ipY & -ilY & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

B. Índice de refração e Polarização

Para a onda cuja a normal está no eixo z , a sua polaridade é definida $\rho = E_y / E_x$. Escolhe-se um eixo de coordenadas de tal modo que $\rho = 0$. A partir das equações de Maxwell, a equação de polarização por Budden [3]. Com, $Y_L = nY$, $Y_T = lY$, a Equação (8) é dada:

$$\rho^2 + \frac{i l^2 Y}{n (U - X)} \rho + 1 = 0 \quad (8)$$

$$\rho^2 = \frac{i Y_T^2}{2 Y_L (1 - X - iZ)} + i \left[\frac{Y_T^4}{4 Y_L (1 - X - iZ)^2} + 1 \right]^{1/2} \quad (9)$$

Tem-se então, a partir da Equação (9) duas polarizações para um meio anisotrópico. Com as equações de Maxwell [2] e a Equação (8), pode-se chegar na fórmula do índice de refração, n dada por Appleton- Hartree [4]

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 - iZ - \frac{\frac{1}{2} Y_T^2}{1 - X - iZ} \pm \left[\frac{\frac{1}{4} Y_T^4}{(1 - X - iZ)^2} + Y_L^2 \right]^{1/2}} \quad (10)$$

A frequência de colisões, f_c , na ionosfera é muito importante, principalmente na camada D , onde influenciam consideravelmente nas perdas do campo elétrico. Com o aumento de f_c , há uma diminuição na influência do número de colisões no cálculo do índice de refração e também nos efeitos dos cálculos dos campos eletromagnéticos. Assim tem-se dois índices de refração para a ionosfera, ou seja, dois modos de propagação. O sinal (+), corresponde ao modo ordinário, O , e o sinal (-), ao modo extraordinário, X .

A Figura 3 mostra o índice de refração para o modo ordinário e o extraordinário, com densidade eletrônica linear de $N = \alpha_1 (z - h_0)$, e $\alpha_1 = 5000$; $h_0 = 600$ km; $f = 3$ MHz; $\nu = 0$.



Para o caso, onde o campo magnético terrestre é perpendicular ou paralelo ao sentido da propagação da onda, os modos ordinários e extraordinários propagam-se independentes.

Quando o campo magnético terrestre faz um ângulo qualquer na direção da propagação, esta independência é quebrada e com isso há uma interação conhecida como acoplamento das ondas. Este acoplamento é relativamente pequena comparada com o restante da ionosfera.

Há vários estudos feitos para a determinação das equações diferenciais, como é o caso do modelo linear e bilinear [6]. O perfil linear e bilinear chegam a equação diferencial através da equação de Stokes[5].

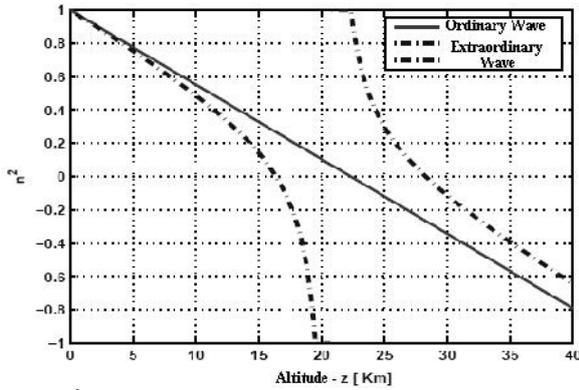


Figura. 3. Índice de refração da ionosfera para o modelo linear.

Neste artigo, considera-se que a influência do campo magnético terrestre é nula, ou seja, a propagação de uma onda eletromagnética em um meio de densidade eletrônica linear, assim como o a um perfil bilinear é isotrópico com colisões.

C. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PERFIL LINEAR

Para Equação (12), tem-se, $\vec{B}_0 = 0$, $Y_L = 0$, $Y_T = 0$. Assim o índice de refração do campo elétrico perpendicular no plano de incidência é de $n^2 = 1 - X / (1 - iZ) = 1 - X / U$. E a matriz, da Equação (9), fica

$$-\varepsilon_0 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_0 E_x = UP_x \\ -\varepsilon_0 E_y = UP_y \\ -\varepsilon_0 E_z = UP_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

Substitui-se $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ na Equação (11) e tem-se

$$D_x = \varepsilon_0 \vec{E}_x + \vec{P}_x = \varepsilon_0 \vec{E}_x - \frac{\varepsilon_0}{U} \vec{E}_x$$

$$D_y = \varepsilon_0 \vec{E}_y + \vec{P}_y = \varepsilon_0 \vec{E}_y - \frac{\varepsilon_0}{U} \vec{E}_y \quad (12)$$

$$D_z = \varepsilon_0 \vec{E}_z + \vec{P}_z = \varepsilon_0 \vec{E}_z - \frac{\varepsilon_0}{U} \vec{E}_z$$

Devido a Equação (14) e $E_y = H_z$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left[1 - S^2 - \frac{1}{U} \right] E_y = 0 \quad (13)$$

Mas $q^2 = 1 - \frac{X}{U} - S^2$

Sendo que q^2 é a raiz da quártica de Booker.

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 [n^2 - S^2] E_y = 0 \quad \text{ou} \quad (14)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 q^2 E_y = 0$$

Quando varia-se a densidade eletrônica, N linearmente com a altitude, chega-se à equação de Stokes.

$$N = \begin{cases} \alpha_1 (z - h_0), & z \geq h_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (15)$$

Onde $\alpha = \left(\frac{8,0610 \alpha_1 10^7}{f^2} \right)$;

z é altitude;
 h_0 é a altitude do início da ionosfera;
 α_1 é o gradiente da densidade de elétrons.

Assim, o índice de refração é

$$n^2 = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{1 - iZ} (z - h_0), & z \geq h_0 \\ 1, & \text{else} \end{cases} \quad (16)$$

A Equação (16), para o modelo linear é escrito:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 \left[C^2 - \frac{\alpha}{1 - iZ} (z - h_0) \right] E_y = 0, & z \geq h_0 \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_0^2 C^2 E_y = 0, & \text{else} \end{cases} \quad (17)$$

Para o modelo linear, a equação diferencial rege os campos na ionosfera é justamente a equação de Stokes, cujas soluções são as funções de Airy[6] A_i e B_i . A região $z < h_0$, têm como soluções $e^{-ik_0 C z}$ e $e^{+ik_0 C z}$, que são duas ondas



propagando no espaço livre. Em toda a análise feita até agora foi considerado que a frequência de colisões, ν , é constante.

Cálculo dos Campos para o Perfil Linear

Com a mudança de variável, para

$$r = \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \left[z - h_0 - (1 - iz) \frac{C^2}{\alpha} \right], \quad \text{a Equação torna-se}$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = r E_y \quad (18)$$

A Equação acima, apresenta duas soluções independentes $A_i(r)$ e $B_i(r)$. A solução B_i , cresce exponencialmente com r (positivo), e não pode ser usada para a solução dos campos na ionosfera, restando então, a solução A_i . Sendo K uma constante, a solução da Equação (18) é

$$E_y = K A_i(r), \quad z \geq h_0 \quad (19)$$

Portanto, H_x pode ser calculado

$$H_x = \frac{1}{ik_0} \frac{dE_y}{dz} = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \frac{i}{k_0} A_i(r) \quad (20)$$

III. RESULTADOS

Abaixo da ionosfera, as duas soluções, $e^{-ik_0 Cz}$ que representa uma onda ascendente, $e^{+ik_0 Cz}$ que representa a onda descendente e R o coeficiente de reflexão total da onda na ionosfera. A solução de E_y e H_x para abaixo da ionosfera são

$$E_y = e^{-ik_0 Cz} + R e^{ik_0 Cz}, \quad H_x = -C e^{-ik_0 Cz} + C R e^{ik_0 Cz} \quad (21)$$

Pelas condições de contorno, chegam-se aos resultados

$$R = \frac{C A_i(r_0) - i P A_i(r_0)}{C A_i(r_0) + i P A_i(r_0)} \cdot e^{-2ik_0 C h_0} \quad (22)$$

$$K = \frac{e^{-ik_0 C h_0} + R e^{ik_0 C h_0}}{A_i(r_0)} \quad (23)$$

Onde
$$P = \left(\frac{\alpha}{K_0(1 - iZ)} \right)^{1/3}, \quad r_0 = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{1 - iZ} \right)^{1/3} \left((1 - iz) \frac{C^2}{\alpha} \right)$$

Para o caso de $Z = 0$, P e r_0 são reais, e $|R|=1$, ou seja, toda energia é refletida. Para $Z \neq 0$, o mesmo não acontece. O processo de reflexão na ionosfera se efetua continuamente até o ponto de reflexão $r_0 = 0$. A partir deste ponto a onda se torna evanescente. Quando considera-se $Z \neq 0$, o ponto onde $r_0 = 0$, não é mais real e neste caso não tem mais sentido falar em ponto de reflexão da onda.

As Figuras 4 e 5 mostram os gráficos de intensidade de campo para várias situações ilustradas no próprio gráfico.

Em ambas as figuras, a atenuação de campo aumenta quando considera a mesma frequência, porém a frequência de colisão aumenta. A densidade eletrônica dá uma razoável aproximação do que acontece na ionosfera, mas somente para frequência de penetração. Quando a frequência da onda está perto ou superior a f_0 (frequência máxima de penetração), há necessidade de tomar o modelo bilinear.

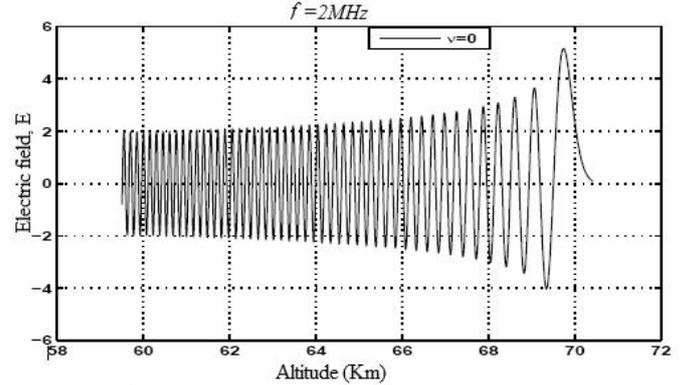


Figura 4. Índice de refração da ionosfera para o modelo linear.

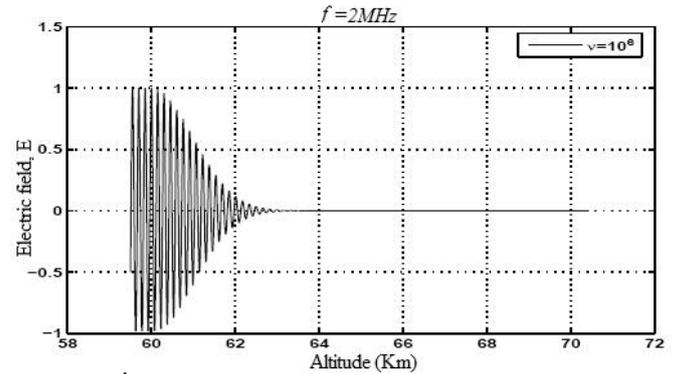


Figura 5 Índice de refração da ionosfera para o modelo linear.

A. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PERFIL BILINEAR

Para o perfil bilinear as soluções dos campos são regidos pelas funções de A_i e B_i , o módulo do coeficiente de reflexão em um modelo bilinear sempre é menor que um $|R| < 1$. Isto explica o fato da onda transmitida na parte superior da ionosfera ser proporcional com o aumento da frequência.

Inicialmente, este modelo foi estudado por Hartree [4], mas sem apresentar resultados numéricos.

$$N = \begin{cases} 0, & z < h_0 \\ \alpha_1(z - h_0), & h_0 < z < h_m \\ -\alpha_1(z - 2h_m + h_0), & h_m < z < 2h_m - h_0 \\ 0, & z > 2h_m - h_0 \end{cases} \quad (24)$$

Onde h_m is a altitude, onde a densidade eletrônica é máxima.



Para Equação (17), o modelo bilinear pode ser dividido em quatro regiões

Para a quarta região, o campo eletromagnético propaga-se no espaço livre, mas somente com uma onda ascendente (de baixo para cima)

$$E_y = de^{-ik_0 Cz}, \quad H_x = -Ce^{-ik_0 Cz} \quad (25)$$

Na determinação das constantes A, B, R, F, G e d, basta igualar os campos de dois em dois, nos pontos de descontinuidade do índice de refração $h_0, h_m, 2h_m - h_0$. E considera r_0 para o valor de r onde $z = h_0$, r_2 para o valor de r onde $z = h_m$, r_1 para o valor de r onde $z = 2h_m - h_0$. Assim, as Equações () e (), obtêm-se

$$de^{-ik_0 C(2h_m - h_0)} = AA_i(r_1) - BB_i(r_1)$$

$$dCe^{-ik_0 C(2h_m - h_0)} = -i \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} (AA_i'(r_1) - BB_i'(r_2 a)) \quad (26)$$

Das Equações () e () têm-se

$$AA_i(r_1) - BB_i(r_1) = FA_i(r_1) - GB_i(r_1)$$

$$-(AA_i'(r_1) - BB_i'(r_1)) = (FA_i'(r_1) - GB_i'(r_1)) \quad (27)$$

E Equações () e ()

$$FA_i(r_0) + GB_i(r_0) = e^{-ik_0 Ch_0} + Re^{ik_0 Ch_0}$$

$$-i \left(\frac{\alpha}{k_0 U} \right)^{\frac{1}{3}} (FA_i'(r_0) - GB_i'(r_0)) = -Ce^{-ik_0 Ch_0} + Re^{ik_0 Ch_0} \quad (28)$$

Onde

$$r = r_1 = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U} \right)^{\frac{1}{3}} C^2 \frac{U}{\alpha}, \quad r_2 = - \left(\frac{k_0^2 \alpha}{U} \right)^{\frac{1}{3}} (h_m - h_0 - C^2 \frac{U}{\alpha}) \quad (29)$$

Para forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_i(r_1) & B_i(r_1) & 0 & 0 & 0 & -e^{-ik_0 C(2h_m - h_0)} \\ iaA_i'(r_1) & iaB_i'(r_1) & 0 & 0 & 0 & Ce^{-ik_0 C(2h_m - h_0)} \\ A_i(r_3) & B_i(r_3) & -A_i(r_3) & -B_i(r_3) & 0 & 0 \\ A_i'(r_3) & B_i'(r_3) & A_i'(r_3) & B_i'(r_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i(r_3) & B_i(r_3) & -e^{-ik_0 Ch_0} & 0 \\ 0 & 0 & iaA_i'(r_1) & iaB_i'(r_1) & ce^{-ik_0 Ch_0} & 0 \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ F \\ G \\ R \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-ik_0 Ch_0} \\ Ce^{-ik_0 Ch_0} \end{bmatrix}, \text{ com } a = \left(\frac{\alpha}{Uk_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (30)$$

Para a Figura 6, é traçado valores de $|R|$ em função da frequência para dois modelos bilineares. Considera-se $f_0 = 9,835242$ MHz, $\alpha_1 = 5000$.

Nota-se que para $f = f_0$, $|R| = 0,5$, decai rapidamente com o aumento de f . Para a frequência da onda com 10 MHz abaixo de f_0 , praticamente toda energia é refletida. Ao passo que para $f > f_0 = 10$ MHz, a onda é praticamente transmitida, conforme figura 6.

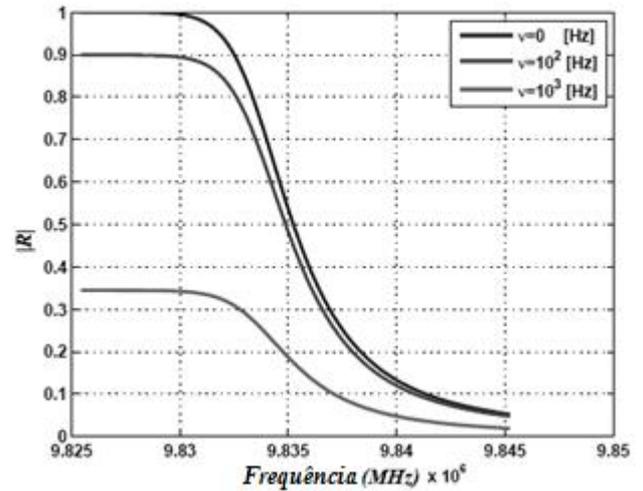


Figura 6. Frequência de colisão para o modelo linear.

IV. CONCLUSÃO

O modelo linear e bilinear apresentam soluções exatas para facilitar o cálculo da propagação do campo na ionosfera, cujas soluções são as funções de Airy [6]. Isto nos facilita a análise do comportamento dos campos na ionosfera apresentadas nas Figuras. 4 e 5, onde percebe-se como a atenuação varia com a frequência de colisões. O coeficiente de reflexão do sinal esta próximo da frequência crítica, onde também pode ser calculada com certa facilidade pelas equações (29) e (30). Na frequência crítica, no caso $f_0 = 9,835242$ MHz, a variação o coeficiente de reflexão $R=0,5$, mudando rapidamente quando aumenta ou diminui a frequência. Para o caso das frequências de colisão o coeficiente de reflexão é próximo da unidade para frequências menores do que 9,825 MHz e praticamente nulo para frequências maiores do que 9,85 MHz conforme é mostrado na figura 6; facilitando assim o cálculo da atenuação na região da ionosfera.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Nicolet, "The collision frequency of electron in the ionosphere", J. Atmosphere. Terr. Phys. 3, 1969, pp. 200M.



- [2] K. G. Budden, “The Theory of Coupling of Characteristic Radio Waves in the Ionosphere”. J. Atmosphere. Terr. [S.l.: s.n.], 1972, pp. 1909.
- [3] H. K. Sen, W, “On generations of the Appleton-Hartree magnetoionic formulas”, J. Geophysics. Res, 1960, pp. 3931.
- [4] S. Chapman, “The Production of Ionization by Monochromatic Radiation Incident Upon a Rotating Atmosphere”. [S.l.: s.n.], 1931, pp. 26.
- [5] M. Abramowitz, I.A.S, “Handbook of Mathematical Functions”. New York: [s.n.], 1965.
- [6] M. Carrijo, G. A. Determinação da Densidade Eletrônica da Ionosfera Usando Foguete. Dissertação (Tese Doutorado) | Instituto Tecnológico da Aeronáutica, ITA, Brasil, 1983.