



COMPARAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO NO CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO GERADO POR UMA LINHA DE TRANSMISSÃO INFINITA

Natália Rodrigues de Melo*¹, Gustavo Lobato Campos¹, Paula Carvalho Resende², Marco Aurélio de Oliveira Schroeder³, Rodolfo Antônio Ribeiro de Moura³

¹IFMG – Instituto Federal de Minas Gerais

²CEFET – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

³UFSJ – Universidade Federal de São João del-Rei

Resumo - A questão da poluição eletromagnética está se tornando cada vez mais matéria de estudos científicos, devido a conscientização sobre os possíveis efeitos na saúde humana decorrentes da exposição a campos eletromagnéticos. Existem normas que especificam os valores limites de exposição do ser humano a campos magnéticos. Os modelos numéricos apresentam uma alternativa para cálculo do campo magnético gerado por linhas de transmissão, auxiliando na determinação destes níveis para determinadas áreas. Este artigo apresenta o cálculo do vetor intensidade de campo magnético gerado por uma linha de transmissão infinita aplicando a lei de Biot-Savart. Para resolução do problema foram utilizados três métodos numéricos de integração diferentes, a fim de se fazer uma comparação entre eles, levando em conta precisão e esforço computacional de cada um. Foram utilizados os seguintes métodos: regra do trapézio, regra do 1/3 de Simpson e quadratura de Gauss-Legendre. Os métodos foram implementados utilizando o *software* MATLAB.

Palavras-Chave - Campo Magnético, Lei de Biot-Savart, Linhas de Transmissão, Métodos Numéricos.

COMPARISON OF NUMERIC METHODS OF INTEGRATION IN THE CALCULATION OF THE MAGNETIC FIELD GENERATED BY AN INFINITE TRANSMISSION LINE

Abstract – Electromagnetic pollution has become an important subject of scientific studies due to the awareness of the effects on human health when exposed to electromagnetic fields. There are standards that specify the maximum levels of magnetic fields that a human being should be exposed to. The numerical models present an alternative to calculate the magnetic field generated by transmission lines and to determine these levels for certain areas. This paper presents the calculation of the magnetic

field vector generated by an infinite transmission line using the Biot-Savart law. To solve the problem, three different numerical integration methods were used in order to make a comparison between them, considering precision and computational effort of each one. The following methods were used: trapezium rule, Simpson 1/3 rule and Gauss-Legendre quadrature. The methods were implemented using MATLAB software.

Keywords - Magnetic Field, Transmission Lines, Biot-Savart Law, Numerical Methods.

NOMENCLATURA

μT Micro Tesla.

pu Sistema por unidade.

I. INTRODUÇÃO

O Brasil possui um sistema de linhas de transmissão que interliga todo o território nacional, responsável pelo fornecimento de energia aos grandes, médios e pequenos centros consumidores. Por motivos físicos e econômicos é necessário elevar a tensão nas linhas de transmissão. Como resultado, tem-se altos níveis de interferência eletromagnética nas proximidades das linhas de transmissão. A elevação desses níveis pode ser nociva a estruturas e seres vivos que estejam posicionados na faixa de passagem das linhas de transmissão [1].

Diversos estudos já foram realizados com o intuito de analisar o efeito na saúde humana devido a exposição a campos magnéticos. Os resultados das pesquisas mostram que o campo magnético possui grande poder de penetração na pele e pode ser definido como carcinogênico, isto é, este não possui a capacidade de iniciar um câncer, mas pode promover a reprodução de células geneticamente alteradas [2].

Os valores limites de exposição humana ao campo magnético devem estar de acordo com os limites estabelecidos pelas normas adotadas pelo país de residência. No Brasil, A Resolução Normativa 398 da ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica), estabelece os limites à exposição humana a campos magnéticos para o público geral e ocupacional, sendo de 200 μT e 1000 μT respectivamente. A população ocupacional compreende adultos expostos a campos eletromagnéticos devido a atividade ocupacional. Entende-se como público em geral, indivíduos de todas as idades não integrantes da população ocupacional [3].

Atualmente, os níveis de campo magnético são frequentemente determinados através de medições, o que também representa um problema, pois o operador fica exposto ao campo por um longo tempo, dependendo da extensão da linha de transmissão. Além disso, algumas linhas passam por rotas de difícil acesso, dificultando as medições [4].

Considerando a importância na estimativa de níveis de campos magnéticos os quais os públicos geral e ocupacional podem ser expostos, esse artigo apresenta uma comparação entre métodos de integração no cálculo do vetor intensidade de campo magnético (H) gerado por linhas de transmissão. A lei de Biot-Savart foi utilizada para determinar H considerando a linha de transmissão infinita. Os métodos numéricos utilizados são: regra do trapézio, regra do 1/3 de Simpson e quadratura de Gauss-Legendre.

II. LEI DE BIOT-SAVART

A lei de Biot-Savart é fundamental para o eletromagnetismo e especifica a direção e magnitude do campo magnético na proximidade de um condutor percorrido por corrente elétrica. Esta pode ser utilizada para calcular o valor do campo magnético dH gerado em um ponto específico, pelo elemento diferencial de corrente $I dl$. O campo magnético é proporcional ao produto entre $I dl$ e o seno do ângulo α formado entre o elemento e a linha que o une o ponto a este elemento, e é inversamente proporcional ao quadrado da distância R entre o ponto (x_0, y_0, z_0) e o elemento diferencial (x, y, z) . A equação 1 mostra a lei de Biot-Savart [5].

$$dH = \frac{I dl \times R}{4\pi R^3} \quad (1)$$

Onde:

$$R = (x_0 - x)\mathbf{a}_x + (y_0 - y)\mathbf{a}_y + (z_0 - z)\mathbf{a}_z \quad (2)$$

$$dl = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \quad (3)$$

Os termos em negrito representam componentes vetoriais. O campo magnético em um ponto P gerado por um condutor infinito percorrido por uma corrente I e localizado no eixo x , como mostra a Figura 1, pode ser calculado considerando o intervalo de integração infinito $(-\infty, \infty)$. Neste caso, o produto vetorial é dado por [6]:

$$dl \times R = [(y_0 - y)\mathbf{a}_z - (z_0 - z)\mathbf{a}_y]dx \quad (4)$$

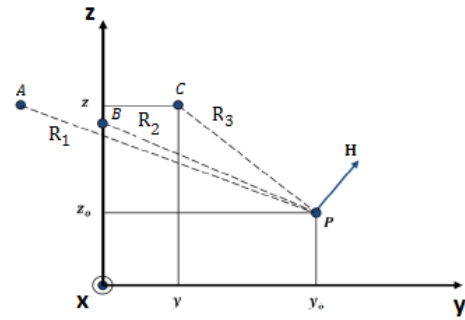
Substituindo (4) na expressão da lei de Biot-Savart, a integral resulta em:

$$H = H_y + H_z = \frac{-I(z_0 - z)\mathbf{a}_y}{2\pi R^2} + \frac{I(y_0 - y)\mathbf{a}_z}{2\pi R^2} \quad (5)$$

O valor eficaz do campo magnético no ponto P pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$H = \sqrt{H_y^2 + H_z^2} \quad (6)$$

Figura 1: Campo magnético de três condutores paralelos e infinitamente longos [6].



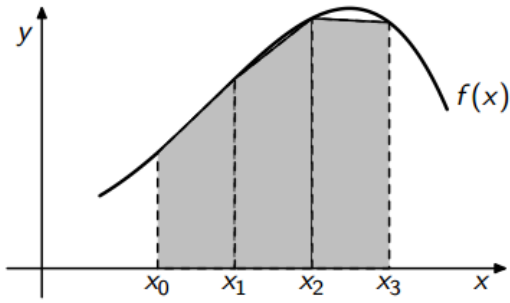
III. MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO

Os métodos numéricos representam uma alternativa no cálculo de integrais de determinadas funções. Esses métodos consistem em aproximar a função em análise por um polinômio interpolador e determinar analiticamente a integral desse polinômio no intervalo de integração. A seguir, são apresentados os métodos numéricos de integração utilizados nesse artigo.

A. Regra do trapézio

A regra do trapézio é um método numérico utilizado para aproximação do cálculo de integrais ou da área abaixo de uma curva, utilizando um polinômio interpolador de grau 1. A regra do trapézio pode ser classificada em simples e composta. A regra do trapézio simples considera apenas o cálculo de uma área abaixo da curva de interesse. A aplicação da regra do trapézio considerando a divisão desta área em um determinado número de faixas com a mesma largura é denominada regra do trapézio composta. Na Figura 2 tem-se uma representação gráfica da regra do trapézio composta, sendo esta utilizada neste trabalho. Sendo assim, a área de cada faixa é aproximada pela área do trapézio formado. A soma dessas aproximações retorna a área total da curva abaixo [7].

Figura 2: Descrição gráfica da regra do trapézio [8].



A equação 7 mostra uma integral definida, com limites de integração definidos por $[a, b]$.

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (7)$$

A equação 7 pode ser aproximada pela integral de um polinômio interpolador de grau 1. A integração analítica desse polinômio considerando apenas uma faixa da função mostrada na Figura 2, resulta em:

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \quad (8)$$

onde y_0 e y_1 , são os valores da função $f(x)$ nos pontos a e b , respectivamente, e h representa a altura do trapézio ($h = x_1 - x_0$). O intervalo $[a, b]$ pode ser dividido em m subintervalos iguais e aplicando a equação 8 a cada dois pontos, tem-se:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x) dx \approx I_1, \text{ com}$$

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{m-1} + y_m)$$

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{m-1} + 2y_m)$$

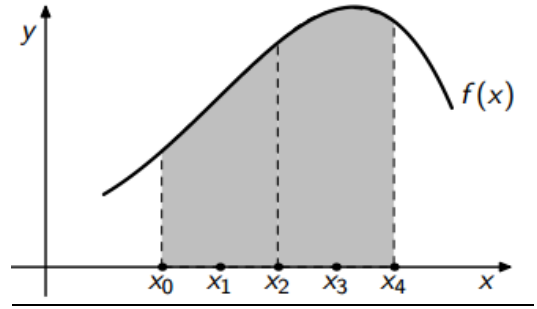
$$I_1 = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^m c_i y_i \quad (9)$$

com $c_0 = c_m = 1$ e $c_i = 1, 2, \dots, m-1$. Para esta regra do trapézio, pode ser utilizado qualquer valor de número de subintervalos m [9].

B. Regra do 1/3 de Simpson

Este método de integração é muito semelhante a regra do trapézio, sendo esta também classificada em simples e composta [9]. Nos dois casos, aproximação de cada parte da curva é feita utilizando um polinômio interpolador do 2º grau (parábola). Na regra do 1/3 de Simpson simples a cada três pontos uma parábola é traçada. A integral de cada parábola é calculada, admitindo-se que esta seja uma boa estimativa da integral da função original. Somando-se todas estas integrais, tem-se uma aproximação satisfatória da integral da função dada. A Figura 3 mostra uma aplicação da regra de 1/3 de Simpson simples.

Figura 3: Descrição gráfica da regra do 1/3 de Simpson [8].



De maneira semelhante a regra do trapézio, a equação 7 pode ser aproximada pela integral de um polinômio interpolador de grau 2. Levando em conta apenas uma faixa da função mostrada na Figura 3, tem-se:

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (10)$$

onde y_0 e y_2 , representam o valor da função $f(x)$ nos pontos a e b respectivamente, e y_1 é o valor de $f(x)$ em um ponto intermediário localizado no intervalo $[a, b]$. A regra do 1/3 de Simpson composta é obtida subdividindo-se o intervalo $[a, b]$ da integral mostrada na equação 7 em m (múltiplo de 2) subintervalos iguais. Utilizando-se a equação 10, tem-se:

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x) dx \approx I_2, \text{ com}$$

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m)$$

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{m-2} + 4y_{m-1} + 2y_m)$$

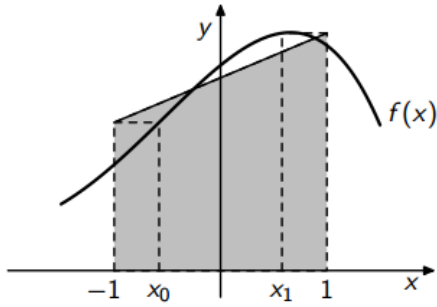
$$I_2 = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^m c_i y_i \quad (11)$$

com $c_0 = c_m = 1$ e $c_i = 4$ se i for ímpar e $c_i = 2$ se i for par. A regra do 1/3 de Simpson composta é utilizada neste trabalho. É importante ressaltar que, neste caso, o número de subintervalos m deve ser múltiplo de 2, que é o grau do polinômio interpolador utilizado pela regra [9].

C. Quadratura de Gauss-Legendre

Enquanto as regras do trapézio e 1/3 de Simpson utilizam pontos fixos nos cálculos, o método da quadratura de Gauss-Legendre permite avaliar a área abaixo de uma curva combinando n pontos quaisquer. A Figura 4 mostra a descrição gráfica da quadratura de Gauss-Legendre, em que foram utilizados apenas dois pontos, x_0 e x_1 , abaixo da curva da função $f(x)$ [10].

Figura 4: Descrição gráfica da quadratura de Gauss-Legendre [8].



Portanto, utilizando n pontos para aproximar a integral de $f(x)$ em $[-1, 1]$ e efetuando a mudança de variável de x para t , é possível determinar a regra da quadratura de Gauss-Legendre:

$$x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}t \quad (12)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 F(t)dt \approx I_n \quad (13)$$

sendo,

$$I_n = A_1F(t_1) + A_2F(t_2) + \dots + A_nF(t_n)$$

de modo que ela seja exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$. Fazendo:

$$F(t) = t^k, k = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

considerando que,

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ for ímpar} \\ \frac{2}{k+1}, & \text{se } k \text{ for par} \end{cases}$$

resultando em,

$$I_n = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (14)$$

cuja solução fornece os n pesos A_i e as n abscissas t_i desejados. Os pesos e as abscissas são determinados de modo a atingir a melhor precisão possível [9].

D. Erros de integração dos métodos numéricos

Quando a função $f(x)$ é aproximada por um polinômio interpolador, existe um erro cometido na interpolação. Sendo assim, é importante definir o erro de truncamento existente para cada método de integração [9].

1. Regra do trapézio

$$E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f^{ii}(\theta), a < \theta < b \quad (15)$$

2. Regra do 1/3 de Simpson

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta), a < \theta < b \quad (16)$$

3. Quadratura de Gauss-Legendre

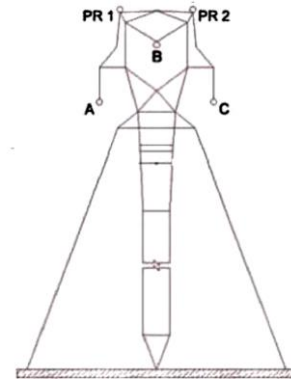
$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta), a < \theta < b \quad (17)$$

onde, θ é o ponto no intervalo $[a, b]$ no qual a derivada de $f^{(ii,iv,2n)}(x)$ apresenta o maior valor em módulo.

IV. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O principal objetivo desse trabalho é calcular o vetor intensidade de campo magnético (H) gerado por uma linha de transmissão, aplicando a lei de Biot-Savart. O sistema analisado é trifásico e a sua geometria pode ser verificada na Figura 5.

Figura 5: Silhueta da torre do sistema em análise. Fonte: Adaptado de [11].



A Tabela 1 mostra as alturas de cada fase do sistema e o espaçamento entre os condutores, considerando como referência a fase B.

Tabela 1: Características geométricas do sistema

Características geométricas do sistema	
Altura média fase A	17,50 m
Altura média fase B	25,00 m
Altura média fase C	17,50 m
Espaçamento entre as fases (referência fase B)	7,50 m

Fonte: Adaptado de (Santos, 2011).

Para maior simplicidade dos cálculos, foi considerado o valor da corrente em pu , com os ângulos de defasamento das fases A, B e C sendo de $0, -120^\circ$ e 120° , respectivamente.

O campo magnético gerado por cada fase foi calculado utilizando os seguintes métodos de integração: regra do trapézio, regra do 1/3 de Simpson e quadratura de Gauss-Legendre.

Os cálculos foram realizados considerando uma malha de $-30 m$ a $30 m$ para o eixo y , com espaçamento entre os pontos de malha de $5 m$. Além disso, todas as fases estão localizadas no eixo x .

V. RESULTADOS E ANÁLISES

Todos os algoritmos deste trabalho foram implementados por meio do *software* MATLAB. Os três métodos de integração em análise foram implementados para resolver o problema de eletromagnetismo proposto, sendo que o algoritmo contendo os passos para o cálculo do campo

magnético é o mesmo, alternando apenas o método de integração. A Tabela 2 mostra o tempo gasto para a execução de cada método.

Tabela 2: Tempo gasto para execução de cada método

Método de integração	Tempo gasto
Regra do trapézio	8,10 s
Regra do 1/3 de Simpson	8,29 s
Quadratura de Gauss-Legendre	120,53 s

Como pode ser visto as regras do trapézio e do 1/3 de Simpson apresentaram valores de tempo próximos. Tal fato já era esperado, uma vez que os dois métodos apresentam algoritmos semelhantes, com apenas algumas alterações. O tempo gasto pelo método da quadratura de Gauss-Legendre foi muito superior aos demais, sendo aproximadamente 15 vezes maior. Isto pode ser justificado pelo fato de o esforço computacional e complexidade do algoritmo de Gauss-Legendre ser maior. Para este método, foram implementados dois algoritmos: um para cálculo das abscissas e pesos e outro para o cálculo da integral, enquanto para as regras do trapézio e do 1/3 de Simpson foi necessário apenas um algoritmo contendo poucas operações aritméticas. Sendo assim, a fim de se obter uma comparação mais justa entre os métodos, utilizou-se como novo critério de parada o tempo de compilação do algoritmo, sendo este de 150 segundos. A Tabela 3 mostra o número total de iterações realizadas por cada método no intervalo de tempo especificado.

Tabela 3: Total de iterações para cada método

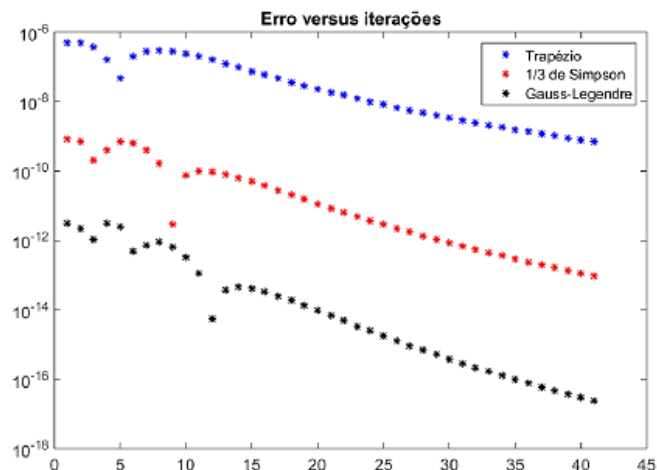
Método de integração	Iterações
Regra do trapézio	146,997
Regra do 1/3 de Simpson	159,774
Quadratura de Gauss-Legendre	10,576

Como mostrado na Tabela 3 o número de iterações obtidas no mesmo intervalo de tempo pela regra do trapézio e pela regra do 1/3 de Simpson é muito superior a quadratura de Gauss-Legendre.

A Figura 6 mostra o erro de cada um dos métodos a cada iteração. Como pode ser visto, a quadratura de Gauss-Legendre apresentou o menor erro, enquanto a regra do trapézio obteve o maior. Nota-se que o erro obtido pelos três métodos é muito pequeno, mesmo assim tal informação pode ser utilizada como parâmetro de comparação entre eles.

Portanto, pode-se concluir que o conceito de eficiência neste caso depende do ponto a ser priorizado. Caso o foco seja a obtenção de valores mais precisos a quadratura de Gauss-Legendre representa a melhor opção. Entretanto, se o principal objetivo é obter um tempo computacional reduzido na obtenção dos resultados, a regra do trapézio ou do 1/3 de Simpson representam a melhor escolha.

Figura 6: Erro dos métodos a cada iteração.



VI. CONCLUSÃO

A determinação da intensidade de campo magnético nas proximidades de linhas de transmissão é de grande importância. Através do conhecimento desses valores é possível investigar se estes estão dentro dos limites estabelecidos pelas normas.

Os métodos numéricos de integração representam uma ferramenta computacional de grande utilidade no cálculo do campo magnético em uma determinada faixa. A aplicação da lei de Biot-Savart juntamente com a regra do trapézio, regra do 1/3 de Simpson e quadratura de Gauss Legendre, mostrou que este último apresentou exatidão maior do que os outros métodos, entretanto seu esforço computacional e complexidade é superior aos demais. Para casos em que a rapidez de convergência do método é o foco principal, as regras do trapézio e do 1/3 de Simpson representam a melhor alternativa, fornecendo resultados satisfatórios, uma vez que o erro obtido para esses métodos também foi pequeno.

AGRADECIMENTOS

A todos os integrantes do Grupo de Pesquisa GSE (Grupo de Soluções em Engenharia), pela interação e colaboração no desenvolvimento do presente trabalho, assim como ao IFMG Campus Formiga.

REFERÊNCIAS

- [1] Moreno, R. F. (2001). Possíveis Efeitos sobre a Saúde Humana Decorrentes da Exposição a Campos Elétricos e Magnéticos de Baixa Frequência. Revisão comentada da literatura XVI SNPTEE – Campinas.
- [2] Lopes, A. A. (2009). Cálculo da Distribuição de Campo Elétrico e Indução Magnética em Subestações de Energia e Linhas de Transmissão. Dissertação. Universidade Federal de Pernambuco.
- [3] ANEEL. (2010). Resolução Normativa nº 394, de 23 de março de 2010. Disponível em: <http://www2.aneel.gov.br/cedoc/ren2015687.pdf>. [Acessado em 15 de maio de 2017].

- [4] ABNT. (1985). NBR 5422: Projetos de linhas de transmissão de energia elétrica. Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- [5] Sadiku, M. N. O. (2004). Elementos de Eletromagnetismo. 2ª Edição. Porto Alegre: Bookman. pp. 243-253.
- [6] Ztoupis, I. N., Gonos, I. F. e Stathopoulos, I. A. (2013). Calculation of Power Frequency Fields from High Voltage Overhead Lines in Residential Areas. 18th International Symposium on High Voltage Engineering. pp. 61-66.
- [7] Yeh, S. T. (1995). Using Trapezoidal Rule for the Area under a Curve Calculation. Disponível em <<http://www2.sas.com/proceedings/sugi27/p229-27.pdf>>. Acessado em 18 de maio de 2017.
- [8] Biloti, R. (2017). Integração Numérica. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~biloti/an/quad.pdf>>. Acessado em 17 de maio de 2017.
- [9] Filho, F. F. C. (2007). Algoritmos Numéricos. 2ª Edição. Belo Horizonte. pp. 211-240.
- [10] Chapra, S. C. e Canale, R. P. (2010). Numerical Methods for Engineers. 6ª Edição. New York: McGraw-Hill. pp. 640-647.
- [11] Santos, M. G. (2011). Acoplamento Elétrico entre Linhas de Transmissão Operando em Regime Permanente e Dutos Metálicos Aéreos. Dissertação. Universidade Federal de São João del-Rei.