



## INVESTIGAÇÃO DA EQUAÇÃO DA POTÊNCIA DE UM SISTEMA MECÂNICO PARA A COLHEITA DE ENERGIA DE VIBRAÇÕES

E. M. C. S. de Oliveira\*<sup>1</sup>, W. M. Leão<sup>1</sup>, B. G. G. L. Zambolini-Vicente<sup>1</sup>

<sup>1</sup>NupSol – IFG-Campus Itumbiara/GO

**Resumo** – Este artigo tem como objetivo a investigação e análise matemática da equação teórica da potência disponível em um sistema mecânico elementar de um grau de liberdade, com vistas no aproveitamento, *a posteriori*, da energia de vibrações em sistemas com transdutores piezelétricos acoplados a circuitos eletrônicos para colheita de energia. A partir da literatura correlata, o trabalho tem como enfoque a dedução detalhada da expressão da potência mecânica disponível, estabelecendo referencial para a análise do comportamento em frequência, fundamental para o desenvolvimento do sistema eletrônico que será projetado na etapa posterior do projeto de pesquisa do qual o presente trabalho faz parte.

**Palavras-Chave** – modelagem matemática, materiais piezelétricos, colheita de energia, energia de vibrações.

### INVESTIGATION OF THE EQUATION OF THE POWER OF A MECHANICAL SYSTEM FOR THE VIBRATION ENERGY HARVESTING.

**Abstract** - The objective of this article is to investigate and analyze the theoretical equation of power available in an elementary mechanical system of one degree of freedom, aiming to the subsequent use of vibration energy in systems with piezoelectric transducers coupled to electronic circuits for harvesting power. From the related literature, the work focuses on the detailed deduction of the expression of available mechanical power, establishing a reference for the analysis of its frequency behavior, fundamental for the development of the electronic system that will be projected in the next stage of the research project, of which the present work is related.

**Keywords** - mathematical modeling, piezoelectric materials, energy harvesting, vibration energy.

#### I. INTRODUÇÃO

Através da crescente demanda que existe por parte da indústria e do grande número de pesquisas do meio acadêmico por fontes alternativas, hoje a área de geração de energia elétrica conhecida por *power harvesting*, que consiste na

colheita da energia ambiente, está em evidência [1][2]. O surgimento destas recentes fontes alternativas culminou no<sup>1</sup> aparecimento de diversos setores que em outros momentos não conseguiram se desenvolver, haja vista que existiam fontes que sob o ponto de vista da viabilidade não eram aplicáveis [3]. Neste aspecto, o conceito de *power harvesting* é muito amplo e explora diversas formas de energia disponíveis no ambiente, apoiado nos diversos materiais com efeito de transdução em diferentes formas de energia. Alguns exemplos dessas energias disponíveis para transdução são:

- Energia luminosa, como a disponível pelo sol.
- Energia dos gradientes de temperatura.
- Energia de irradiação eletromagnética.
- Energia cinética.

No caso da energia solar, a transdução pode ser realizada através do efeito *seebeck*, que consiste na conversão direta da diferença de temperatura em tensão elétrica. Já em grandes centros urbanos, uma fonte de energia ambiente a ser explorada são as ondas de rádio e televisão, via transdução eletromagnética. Para o aproveitamento da energia cinética, disponível na forma de vibração em estruturas, edifícios, ou mesmo em ambientes domiciliares, existe a colheita de energia via piezeletricidade, que é o foco do presente projeto.

Este último efeito acontece devido a uma característica que alguns materiais tem em sua natureza. Quando se aplica uma deformação mecânica sobre os tais materiais, o resultado final é o aparecimento de uma tensão elétrica não-nula, ou quando existe uma tensão elétrica o material se deforma. Isso deve-se ao comportamento das cargas quando estão submetidas a um estresse mecânico, que reagem espacialmente de tal forma que cargas positivas e negativas se separam [5]. Este fenômeno recebe o nome de efeito piezelétrico.

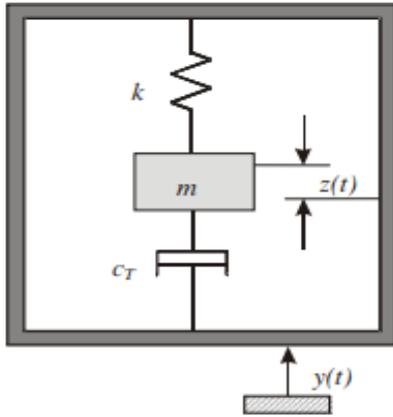
Através do efeito piezelétrico, o presente trabalho tem como foco o aproveitamento da energia de deformação disponível na forma de vibração (energia cinética) de sistema mecânico a ser apresentado. Para tal, baseando-se nos trabalhos de [3] e [4], as equações elementares de dinâmica serão investigadas a fim de se modelar a potência mecânica teórica disponível, sendo esse um trabalho essencial para a modelagem do comportamento das grandezas elétricas mediante acoplamento eletromecânico entre a estrutura hospedeira e a pastilha piezelétrica, bem como para o desenvolvimento do sistema eletrônico que será projetado na próxima etapa do projeto.

\*edu.matexyz@gmail.com

## II. MODELAGEM DO PROBLEMA MECÂNICO

O aparato mecânico apresentado na Figura 1, composto por sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade (movimenta-se apenas na direção vertical), instalado em uma armação que é excitado por uma vibração externa dada pela função  $y(t) = Y \sin(\omega t)$ . Segundo o trabalho de [3], a energia que será entregue para o amortecedor pode ser entendida como aquela a ser aproveitada para a transdução eletromecânica em uma pastilha piezolétrica, haja visto que a pastilha introduzirá amortecimento análogo ao desse elemento [6]. Para equacionar o montante da energia disponível no amortecedor é necessário encontrar as equações que regem a dinâmica da massa  $m$ , tal como a equação da sua posição  $z(t)$  em relação ao aparato e a força resultante sobre a mesma.

Fig. 1. Sistema mecânico massa, mola e amortecedor.



Fonte: Adaptado de [4].

Da dinâmica de corpos, a resultante de todas as forças na massa  $m$  dada pela equação:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (1)$$

Uma vez que o deslocamento relativo da massa  $m$  é dado por:

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1)

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (3)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na Equação (3), com condições iniciais nula, tem-se no domínio da frequência:

$$mS^2Z(s) + cSZ(s) + kZ(s) = -mS^2Y(s) \quad (4)$$

Para o termo

$$G(s) = \frac{Z(s)}{Y(s)} \quad (5)$$

Aplicando (5) em (4) obtêm-se

$$G(s) = \frac{-s^2}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (6)$$

$G(s)$  é um número complexo que multiplicado por  $Y(s)$  resultará em  $Z(s)$ . Aplicando a transformada inversa:

$$z(t) = \frac{\omega^2 Y \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \quad (7)$$

Tal que  $\varphi$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - \omega^2 m}\right) \quad (8)$$

E a função  $z(t)$  é a posição da massa  $m$  em relação ao aparato.

A partir da análise da Equação (7) pode ser facilmente provado que o valor máximo da posição relativa  $z(t)$  é atingido quando  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Para este valor de frequência angular, a massa passa a oscilar com os máximos valores possíveis de amplitude. Tal fenômeno é denominado ressonância e é comumente observado na natureza. O fenômeno da ressonância possui inúmeras aplicações seja em engenharia ou até mesmo na área da medicina. Em alguns casos a ressonância é responsável pela danificação de estruturas e construções, uma vez que o corpo que entra em ressonância passa a vibrar com uma frequência específica e com máximos valores de pico. Para o efeito piezolétrico a ressonância não é interessante em alguns casos, conforme relata [5], já que o material piezolétrico é de natureza cerâmica, que não pode ser submetida a grandes amplitudes de deformação.

## III. EQUAÇÃO DE POTÊNCIA

Conforme o trabalho [8], a potência mecânica na massa  $m$  pode ser calculada pelo produto da força e velocidade:

$$p(t) = -m\dot{y}[\dot{y} + \dot{z}] \quad (9)$$

Impondo-se um deslocamento  $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$  no aparato e aplicando a Equação (7) em (9), após algumas simplificações tem-se:

$$p(t) = \frac{mY^2\omega^3}{2} \sin(2\omega t - 2\varphi) \left[ 1 + \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \right] \quad (10)$$

Após mudança de variáveis para anular a fase e aplicando a transformada de Laplace na Equação (10), tem-se:

$$P(s) = \frac{mY^2\omega^3}{2} \left( \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2} \right) \left[ 1 + \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{m}\right)^2}} \right] \quad (11)$$

Substituindo  $s = j\omega$  na Equação (11) e, seguindo os trabalhos [8] e [9], que eliminam o tendência oriunda da frequência cúbica no denominador, bem como o deslocamento dado pelo termo unitário, tem-se:

$$P(\omega) = \frac{mY^2\omega}{3\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\tau^2\omega_n^2\omega^2}} \quad (12)$$

Uma vez que  $\tau = c/2m\omega_n$  é o fator de amortecimento representado fisicamente pelo transdutor piezoelectrico. Para  $\omega = \omega_n = \sqrt{k/m}$ , a Equação (12) torna-se:

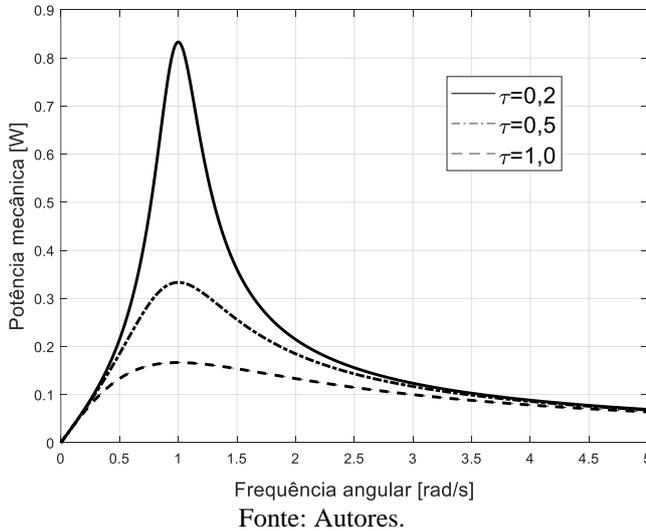
$$P = \frac{m\gamma^2}{6\tau\omega_n} \quad (13)$$

Esse é o caso em que o sistema entra em ressonância.

#### IV. ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE POTENCIA

Observando a Figura 2 e realizando análise qualitativa do aspecto das curvas obtidas, uma vez que as mesmas foram obtidas a partir de valores unitários atribuídos aos parâmetros Eq.(12), pode-se inferir que para situações nas quais a frequência de perturbação está estagnada em torno de um valor fixo é interessante reduzir o máximo possível o fator de amortecimento, respeitando-se as limitações físicas do gerador para obter-se a máxima potência elétrica. No entanto, uma vez que a frequência de excitação varie muito, especialmente em frequências maiores, valores de fator de amortecimento altos tornam-se interessantes para garantir um nível de potência disponível quase constante [2]. Observando a figura 2, nota-se que o pico de potência de 0,8W, que ocorre para 1rad/s enquadra-se no valor previsto pelo trabalho [10], que possibilita aplicações de baixíssimo consumo de potência, tais como redes de sensores sem fio para grandezas elementares para automação [11].

Fig. 2. Potência em função da frequência para diferentes valores de amortecimento.



Assim, como foi mostrado no item anterior, a estrutura transdutora opera em sua “capacidade máxima” para um valor de frequência igual a frequência de ressonância do sistema, conforme deduzido na Equação (13). De acordo com essa equação, a potência é inversamente proporcional ao fator de amortecimento  $\tau$ . A princípio, teoricamente, se o amortecimento fosse reduzido a zero, seria possível obter potência infinita, o que na prática não é factível [12], uma vez que em sistemas mecânicos reais existe sempre o amortecimento intrínseco ao material [13], denominado amortecimento estrutural [14]. Assim, sempre existe um nível

de amortecimento estrutural [15], o que implica na prática em possibilidade de geração finita de energia conforme [5]. Além disso, o amortecimento regula as limitações físicas que existem no gerador, pois a massa, por exemplo, oscilaria de forma destrutiva quando fora das especificações (e próximo da frequência de ressonância) [15]. É nesse sentido que é importante no momento da elaboração de um gerador transdutor piezoelectrico considerar quais serão os valores de amortecimento que maximizarão a potência elétrica gerada, no entanto respeitando as limitações físicas do projeto [9]. A frequência de operação e o amortecimento do gerador devem ser projetadas dependendo da aplicação tendo em vista que uma parte da potência mecânica e elétrica é perdida na estrutura do gerador por atrito interno, amortecimento pela resistência do ar e por efeito joule dissipando energia no ambiente na forma de calor.

#### V. CONCLUSÕES

Para o sistema mecânico apresentado anteriormente, assim como para outros que apresentam a mesma configuração de oscilação e que podem ser modelados por equações semelhantes, o transdutor piezoelectrico pode ser modelado mecanicamente como um amortecedor que irá coletar a potência disponibilizada pelo sistema mecânico convertendo-a em potência elétrica.

Assim como foi abordado no item anterior, a estrutura hospedeira que irá fornecer potência mecânica para transdução precisa vibrar com um valor de frequência conhecido e maior possível dentro dos limites das especificações do hospedeiro. Para o sistema em ressonância, uma outra análise cabível está no valor de amortecimento que o sistema mecânico precisa apresentar. De acordo com a Equação (13), quanto menor o valor de amortecimento do sistema maior será o valor da potência disponível. No entanto, tal afirmativa não é verdadeira pois a massa não tem um espaço ilimitado para transladar e existem valores de amortecimento que são impossíveis de anular como a resistência do ar, por exemplo.

Frente ao exposto, deve-se acrescentar que os geradores piezoelectricos apresentam algumas vantagens em relação as fontes de baixa potência convencionais disponíveis no mercado elas:

- Vantagens sobre baterias, pois as mesmas têm um considerável volume, vida útil muito curta e desgastam-se muito rápido.
- Aproveitamento de energia despendida no ambiente, já que a potência produzida que será consumida pela carga é integralmente coletada localmente.
- Em pequenas cargas instaladas em lugares remotos de difícil acesso para manutenção, onde a demanda elétrica pode ser atendida por um transdutor piezoelectrico.

#### VI. REFERÊNCIAS

- [1] Narita, F., Fox, M. “A Review on Piezoelectric, Magnetostrictive, and Magnetoelectric Materials and Device Technologies for Energy Harvesting

- Applications” *Advanced Engineering Materials*. 2017, 1700743. DOI: 10.1002/adem.201700743.
- [2] Makimoto, T., Sakai, Y.; Y.; “Evolution of Low Power Electronics and Its Future Applications”, *ISLPED* 2003.
- [3] Williams, C. B., Yates, R. B. “Analysis of a micro-electric generator for Microsystems”, *Journal of Sensors and Actuators*, 52º Edição, pp. 8-11, 1996.
- [4] Beeby, S. P., Tudor, M. J., White, N. M. “Energy harvesting vibration sources for Microsystems applications”, *Journal of Measurement Science And Technology*, 17º Edição, pp. R175–R195, 2006.
- [5] Priya, S. and Inman, D. J., *Energy Harvesting Technologies* Springer, 2009.
- [6] Siddique, A. R. M.; Mahmud, S., Heyst, B. V. “A comprehensive review on vibration based micro power generators using electromagnetic and piezoelectric transducer mechanisms”. *Journal of Energy Conversion and Management*, p.728 - 747, 2015.
- [7] Priya, S. Song, H., Zou, Y. Varghese, R. Chopra, A., Kim, S., Kanno, I., Wu, L., Ha, D. S., Ryu, J., Polcawich, R. G. “A Review on Piezoelectric Energy Harvesting: Materials, Methods and Circuits”. *Published Online: 2017-02-01* .DOI: 10.1515/ehs-2016-0028.
- [8] Shu, Y. C., Lien, I. C., “Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems. *Journal of Smart Materials and Structures*”, 15 (2006) 1499–1512. DOI:10.1088/0964-1726/15/6/001.
- [9] Erturk, A. and Inman, D. J., *Piezoelectric Energy Harvesting* John Wiley & Sons, 2011.
- [10] S. Roundy, E. S. Leland, J. Baker, E. Carleton, E. Reilly, E. Lai, B. Otis, J. M. Rabaey, P. K. Wright, and V. Sundararajan, “Improving power output for vibration-based energy scavengers,” *IEEE Pervasive Comput.*, vol. 4, no. 1, pp. 28–36, Mar. 2005.
- [11] Sankman J., Ma D., “A 12- $\mu$ W to 1.1 mW AIM Piezoelectric Energy Harvester for Time-Varying Vibrations with 450nA”. *IEEE transactions on power electronics*, vol. 30, no. 2, february 2015.
- [12] Sotelo JR, J.: *Introdução às vibrações mecânicas*. 1ª Edição, Blucher, 2006.
- [13] Rao . S.S.: *Vibrações Mecânicas*. Edgard Blücher 4ª Edição, Person, 2009.
- [14] Fonseca, A. *Vibrações*. 1ª. Ed. Ao Livro Técnico, 1964.
- [15] Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, The MacMillan Co, 1969.
- [16] Thomson, W., *Teoria das Vibrações com aplicações*, Interciência, 1975.

## VII. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao NupSol, pela colaboração neste trabalho. Este projeto é financiado pelo IFG (Proposta Nº 2018131304759159, Edital PIBIT 011/2018).

## VIII. DADOS BIOGRÁFICOS

**Eduardo Mateus Costa Santos de Oliveira**, é acadêmico de engenharia elétrica no IFG/Itumbiara-GO e está no 6º período. Tem pesquisas concluídas na área de máquinas elétricas com foco em Máquinas a relutância variável no

NupSE do IFG/Itumbiara-GO e atualmente é membro pesquisador do NupSol – Núcleo de Pesquisas e Inovação Tecnológica em Fontes Renováveis de Energia no IFG/Itumbiara-GO. No momento trabalha com a exploração de microfones que colhem energia do ambiente e as converte em potência elétrica.

**Willian Martins Leão** possui graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Uberlândia (2013) e mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo (2015). Atualmente, é professor dedicação exclusiva do Instituto Federal de Goiás, em Itumbiara, GO. A sua pesquisa concentra-se nos temas: robótica, controle robusto, identificação de sistemas, eficiência energética, energias renováveis, automação e instrumentação.

**Bruno Gabriel Gustavo Leonardo Zambolini Vicente**, é engenheiro eletricitista com ênfase em Sistemas de Energia e Automação pela USP/São Carlos –SP (2008), mestre em engenharia mecânica pela UFU/Uberlândia –MG (2014), pesquisador de doutorado no INCT-EIE da UFU e professor-pesquisador no NupSol – Núcleo de Pesquisas e Inovação Tecnológica em Fontes Renováveis de Energia, junto ao corpo efetivo de docentes do IFG/Itumbiara-GO. Atualmente trabalha no desenvolvimento da exploração de microfones de energia, com vistas à colheita de energia do ambiente, especialmente o aproveitamento de vibrações mecânicas.