



## ESTUDO DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA UM ROBÔ COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE

Murylo Élvio Rocha Cajá Pereira\*<sup>1</sup>, Leandro José Rocha<sup>2</sup> e Aline Fernanda Furtado Silva<sup>3</sup>

<sup>123</sup>IFTM – Instituto Federal do Triângulo Mineiro

**Resumo** – Este artigo tem por objetivo descrever a análise e o equacionamento matemático necessário para o estudo de um braço robótico articulado com seis graus de liberdade. Para isso é feita uma revisão bibliográfica da cinemática comumente aplicada a robôs industriais e um estudo do método de DENAVIT-HARTENBERG. Ao final do equacionamento é possível observar a solução cinemática direta para este tipo de robô. Em pesquisas futuras pretende-se aplicar as equações aqui analisadas para construção de um protótipo robótico com 6-GDL acoplado a um robô móvel.

**Palavras-Chave** – cinemática, equacionamento, graus de liberdade, modelagem, robótico.

### STUDY OF MATHEMATICAL MODELING FOR A ROBOT WITH SIX DEGREES OF FREEDOM

**Abstract** - This article aims to describe the analysis and mathematical equation necessary for the study of a robotic arm articulated with six degrees of freedom. For this, a bibliographical review of the kinematics commonly applied to industrial robots and a study of the DENAVIT-HARTENBERG method is made. At the end of the equation it is possible to observe the direct kinematic solution for this type of robot. In future research, we intend to apply the equations analyzed here for the construction of a robotic prototype with 6-GDL coupled to a mobile robot.

**Keywords** - kinematics, equation, degrees of freedom, modeling, robotics.

### I. INTRODUÇÃO

Este artigo trata de uma pesquisa que envolve um robô móvel com seis graus de liberdade (será utilizada a referência 6-GDL para esta especificação do robô), o qual envolve técnicas de modelagem matemática.

\*murylorocha98@gmail.com

Segundo Barcelos (2017) modelo é a semelhança de sua configuração da existência, a modelagem matemática se identifica como a área do conhecimento que estuda uma simulação de sistemas reais tal que abrange o campo das engenharias, é um conjunto de símbolos e relações matemáticas.

A modelagem matemática é comumente utilizada para resolver diversos tipos de problemas (MENDES, 2009), na robótica ela é usada principalmente para determinar a orientação de robôs móveis e robôs industriais por meio de coordenadas cartesianas e eixos de referência (NIKU, 2013).

O Artigo tem como objetivo introduzir o estudo da modelagem matemática para finalizar o projeto de iniciação científica desenvolvido pelo autor durante o período de novembro/2017 a agosto/2018, e obter um conhecimento maior na área da matemática que envolve as coordenadas esféricas utilizadas para determinar a localização de um robô.

Podem-se fazer robôs por uma continuação de articulações em diversas ordens. Essas articulações podem ser classificadas como lineares ou de rotação. Algum elo pode dar-se com qualquer comprimento, sendo torcidos e dobrados e podem estar em qualquer plano, precisamente pode-se modelar e analisar qualquer tipo de robô (MARTINEZ SILVA, 2016). Com isso, foi atribuído um método de referências a qualquer articulação e estabeleceu-se uma técnica para modificar um referencial para o próximo. Condigam totais variações da base para a primeira articulação, para articulação próxima, até comparecer a última articulação. (NIKU, 2013).

Uma metodologia utilizada é a de Denavit-Hartenberg que libera e determina parâmetros utilizando-se da ficção de uma conversão de sistemas cinemáticos de robôs ou manipuladores espaciais. (FILIPPO, 2006.)

### II. CINEMÁTICA

Robôs industriais contêm, normalmente, seis graus de liberdade (SANTOS, 2004). Graus de liberdade indicam os movimentos do braço robótico no espaço bidimensional ou tridimensional, cada junta define um ou dois graus de liberdade. Os três graus de liberdade iniciais de um robô possuem a função de posicionar o efetivador final e os três

últimos são responsáveis por direcionar o mesmo (NIKU, 2013).

Pretende-se no primeiro momento, através do uso da representação de Denavit-Hartenberg de Equações de Cinemática Direta de Robôs para modelar matematicamente um braço robótico articulado 6-GDL simples.

A cinemática de um robô industrial manipulador é o estudo da posição e da velocidade do seu comprimento e de seus ligamentos.

### A. Cinemática Direta e Inversa dos Robôs

Segundo Niku (2013), o cálculo da posição e da orientação da mão do robô é chamado de análise cinemática direta, que permite calcular onde o robô está em determinado momento. Na cinemática direta tem-se que elaborar um conjunto de equações para se relacionar com a figura própria de um robô de tal forma que, ao deslocar as variáveis articulares e de elos nessas equações, pode-se calcular a localização e a direção dos robôs. Esta equação será utilizada para derivar as equações cinemáticas inversas.

Por outro lado a cinemática inversa é a mais importante, já que seu controlador do robô calcula os valores articulares usando equações e manipulará o robô para o ponto e a direção desejada. Ao colocar a mão do robô em local e orientação desejados, deve-se saber quais devem ser os comprimentos dos elos ou dos ângulos das articulações de um robô real (NIKU, 2013).

### B. Equações

As equações de cinemática direta e inversa de robôs (posição) da origem de um referencial ligado a um corpo rígido possuem três graus de liberdade, logo inteiramente define-se, por três itens de conhecimento, que o resultado é que a posição de origem pode ser definida em qualquer uma das coordenadas frequentes. Os próximos itens tratados; 1) Coordenadas cartesianas; 2) Coordenadas cilíndricas; 3) Coordenadas esféricas; 4) Coordenadas articulares são imprescindíveis para a compreensão do modelo de Denavit-Hartenberg.

#### 1) Coordenadas cartesianas

Existem três movimentos lineares passando nos eixos x, y e z (ANTON, 2006). Um robô pórtico é essencialmente um robô de coordenadas cartesianas a não ser pelo fato de que, o robô é normalmente ligado a um referencial retangular de cabeça para baixo.

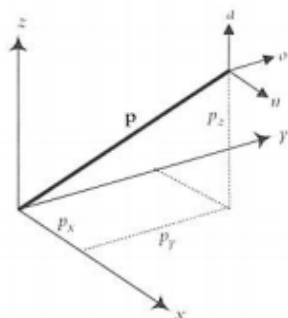


Figura 1 – Coordenadas Cartesianas.  
Fonte: (NIKU, 2013).

#### 2) Coordenadas cilíndricas

Nas coordenadas cilíndricas, contém duas versões lineares e uma rotação. Assim que essas modificações se tornam relativas ao sistema universo, a transformação total causada por estas três transformações é encontrada por meio de pré-multiplicação por cada matriz.

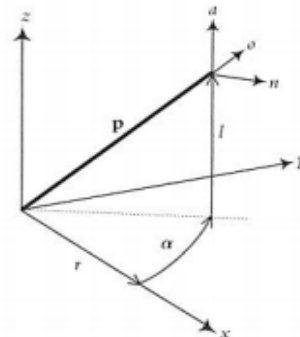


Figura 2 - Coordenadas Cilíndricas.  
Fonte: (NIKU, 2013).

#### 3) Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas equivalem a um movimento linear e duas rotações. Uma vez que essas transformações são totalmente relativas ao referencial universo, a transformação total provocada por essas três transformações pode ser encontrada pré-multiplicando por matriz de uma rotação.

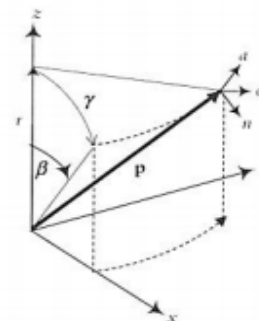


Figura 3 – Coordenadas Esféricas.  
Fonte: (NIKU, 2013).

#### 4) Coordenadas Articulares

Estas coordenadas são mescladas por três rotações.

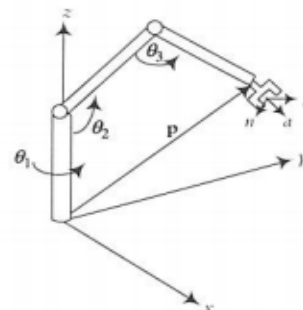


Figura 4 – Coordenadas Articulares.  
Fonte: (NIKU, 2013).

### III. TEOREMA DE DENAVIT-HARTENBERG

Para descobrir o obstáculo da cinemática direta se encontram vários métodos que desenvolvem esta questão, neste artigo se usará o teorema de Denavit-Hartenberg.

#### A. História

Denavit e Hartenberg publicaram juntos em 1955, na (ASME Journal of Applied Mechanics), artigo que foi usado futuramente como forma de representação para modelar robôs e derivar suas equações de movimento. A técnica usada se transformou como uma forma padrão de representar os robôs e modelar seus movimentos, atualmente ela é essencial para o aprendizado (NIKU, 2013).

#### B. Método (D-H)

Denavit e Hartenberg sugeriram para atribuir um sistema de coordenadas usando a regra da mão direita, uma notação científica sistemática. Assim que estes sistemas de coordenadas se fixam no elo, serão concedidas transformações entre sistemas de coordenadas adjacentes que podem ser representadas por matrizes homogêneas (DENAVIT, 1955).

A imagem a seguir mostra as três articulações dadas por D-H. Para a primeira se atribui  $n$ , para a segunda  $n + 1$ , e  $n + 2$  para a terceira. Cada articulação gira como transladar. A primeira coisa a fazer para modelar o robô com a representação D-H é atribuir um sistema referencial local para cada articulação, atribuir os eixos  $z$  e  $x$ , a representação D-H não usa o eixo  $y$  para nada. (NIKU, 2013).

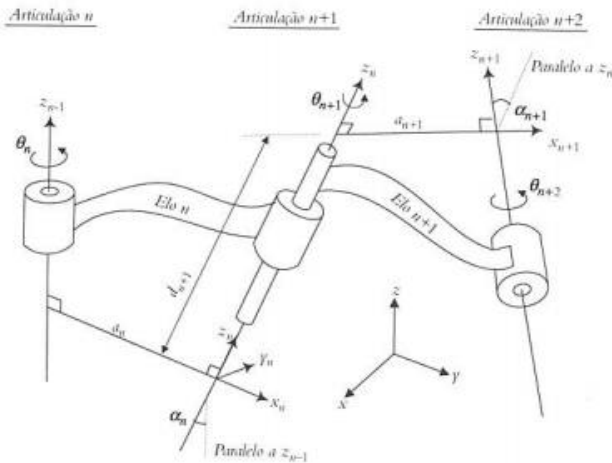


Figura 5 – Representação Denavit-Hartenberg.  
Fonte: (NIKU, 2013).

Cada articulação  $n$ , seja de revolução ou prismática, possui um eixo  $z$  que recebe como índice  $n-1$ . A variável articular para uma articulação de revolução será a rotação em torno do eixo  $z$  ( $\theta$ ) e para uma articulação prismática será o comprimento ao longo do eixo  $z$ , representado por  $d$ .

Geralmente as articulações não são paralelas nem se interceptam. A reta normal comum representa a menor distância entre dois eixos de juntas sucessivos, sendo perpendicular aos mesmos. O eixo  $x$  é definido a partir e na

mesma direção da normal comum. Como exemplo se  $a_n$  é a normal comum entre  $z_{n-1}$  e  $z_n$ , a direção de  $x_n$  será ao longo de  $a_n$ . Caso dois eixos  $z$  forem paralelos entre si, haverá uma infinidade de normais comuns porém somente a que se encontrar na mesma direção da anterior será considerada. Se os eixos  $z$  se interceptam, a normal comum será a reta perpendicular ao plano formado por eles no ponto de interseção.

Na Figura 5,  $\theta$  representa a rotação em torno do eixo  $z$ ,  $d$  representada a distância entre duas normais comuns sucessivas,  $a$  representa o tamanho de cada normal comum e  $\alpha$  representa o ângulo entre dois eixos  $z$  consecutivos.

Em seguida, já com todos os eixos definidos, um sistema de referência ( $x_n - z_n$ ) é transformado para o próximo ( $x_{n+1} - z_{n+1}$ ) por meio de quatro etapas:

1- Rotacionar o eixo  $z_n$  um ângulo de valor  $\theta_{n+1}$ . Consequentemente  $x_n$  e  $x_{n+1}$  se tornarão paralelos (Figura 5.a).

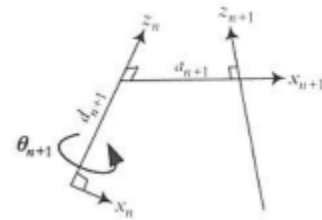


Figura 5.a - Representação Denavit-Hartenberg.  
Fonte: (NIKU, 2013).

2- Mover  $x_n$ , ao longo do eixo  $z$ , uma distância de  $d_{n+1}$ , tornando  $x_n$  e  $x_{n+1}$  colineares (Figura 5.b).

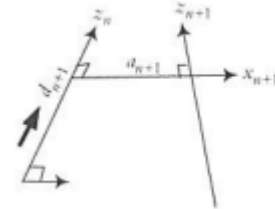


Figura 5.b - Representação Denavit-Hartenberg.  
Fonte: (NIKU, 2013).

3- Mover a origem de  $x_n$  ao longo do eixo  $x_n$  por uma distância de  $a_{n+1}$  (Figura 5.c).

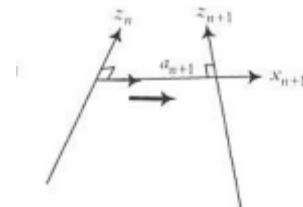


Figura 5.c- Representação Denavit-Hartenberg.  
Fonte: (NIKU, 2013).

4- Rotacionar o eixo  $z_n$  em relação ao eixo  $x_{n+1}$  de um ângulo de  $\alpha_{n+1}$ . Co mo resultado, os dois referenciais serão idênticos (Figura 5.d).

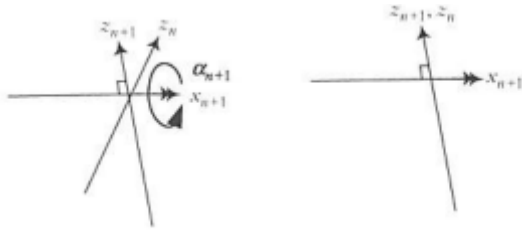


Figura 5.d- Representação Denavit-Hartenberg.  
Fonte: (NIKU, 2013).

Portanto é possível, a partir do sistema de referência do robô, realizar transformações pelas articulações até o atuador final.

Estes quatro passos podem ser representados por  ${}^nT_{n+1}$ , com todas as transformações ocorrendo em relação ao referencial atual( $n+1$ ).

$${}^nT_{n+1} = Rot(z, \theta_{n+1}) \times Trans(0,0,d_{n+1}) \times Trans(a_{n+1},0,0) \times Rot(x, \alpha_{n+1}) \quad (1)$$

$${}^nT_{n+1} = \begin{bmatrix} C\theta_{n+1} & -S\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & S\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}C\theta_{n+1} \\ S\theta_{n+1} & C\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & -C\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}S\theta_{n+1} \\ 0 & S\theta_{n+1} & C\alpha_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

A transformação total desde a base do robô até o atuador final será:

$${}^RT_H = {}^RT_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n \quad (3)$$

No intuito de facilitar os cálculos, uma tabela de parâmetros pode ser utilizada para colher os valores para posteriormente substituí-los na fórmula matricial.

#### IV. MODELAGEM PARA UM ROBÔ COM 6-GDL

Neste modulo será feita o estudo da modelagem matemática em um robô móvel com seis graus de liberdade usando as referências e os cálculos de SAEED B. NIKU, 2013. A análise dos cálculos faz parte do projeto de iniciação científica.

O exemplo dado para a análise é sobre a modelagem de um robô móvel simples, ao qual se deve atribuir os sistemas de coordenadas necessárias com base na representação de D-H, preenchendo a tabela de parâmetros de acompanhamento e derivando a equação cinemática direta do robô.

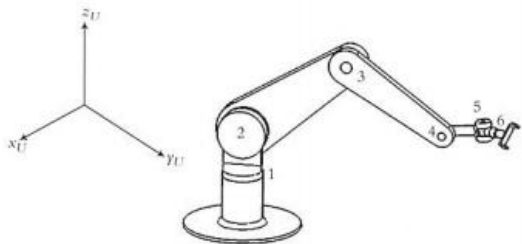


Figura 6 - Um simples robô articulado 6-GDL - (NIKU, 2013).

A Figura 6 mostra exatamente as articulações e os seis graus de liberdade, onde iremos usar para a análise.

A figura mostra um simples robô articulado com 6-GDL, e simplificado sem deslocamentos ou ângulos de torção nas articulações. Na análise as articulações 2, 3 e 4 estão em mesmo plano, isso fará com que os valores de  $d_n$  sejam nulos. Para atribuir sistemas de coordenadas ao robô são observadas as articulações, primeiramente se atribui os eixos  $z$  e depois os eixos  $x$  de cada articulação (NIKU, 2013).

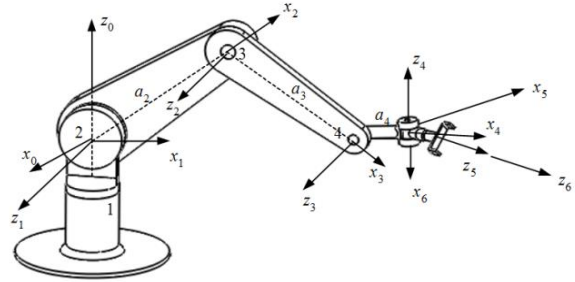


Figura 7 - Exemplo de sistema de referência de um robô 6-GDL - (NIKU, 2013).

O  $z0$  representa os movimentos em torno da articulação 1 e  $x0$ , um eixo fixo que representa a base do robô, está paralelo em relação ao eixo  $x$  pertencente ao sistema de referência. Logo,  $z1$  é atribuído à segunda articulação. O  $x1$  será normal a  $z0$  e  $z1$  pois esses dois eixos se cruzam. O  $x2$  será um alongamento da normal comum entre  $z1$  e  $z2$ , assim como  $x3$  estará na direção da normal comum entre  $z2$  e  $z3$  e  $x4$  na de  $z3$  e  $z4$ . Por fim,  $z5$  e  $z6$  são observados colineares entre si. Além disso, é importante definir o local das origens do primeiro e do último referencial porque isso determinará a transformação total do braço robótico e independente de como os referenciais intermediários estão dispostos, a transformação total será a mesma, desde que o primeiro e o último sejam os mesmos.

Posteriormente, é preenchida a tabela com os parâmetros do robô. Começando por  $z0 - x0$ , haverá uma rotação de  $\theta1$  para trazer  $x0$  para  $x1$ , uma translação de  $a = +90^\circ$  para levar  $z0$  para  $z1$ . Até então todos os parâmetros da primeira transformação foram analisados e listados na tabela. Basta seguir os mesmos passos até a última transformação.

Tabela I – Parâmetros para o robô (NIKU, 2013)

#	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
0-1	$\theta_1$	0	0	90
1-2	$\theta_2$	0	$a_2$	0
2-3	$\theta_3$	0	$a_3$	0
3-4	$\theta_4$	0	$a_4$	-90
4-5	$\theta_5$	0	0	90
5-6	$\theta_6$	0	0	10

Agora, a equação cinemática direta do robô pode ser encontrada substituindo os parâmetros nas matrizes.

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2 a_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3 a_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & C_4 a_3 \\ S_4 & 0 & C_4 & S_4 a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} C_6 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_6 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4)$$

A transformação total é dada por:

$${}^R T_H = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

A solução cinemática direta permite encontrar a localização e orientação final do robô.

## V. CONCLUSÕES

A partir deste trabalho é possível, estabelecer cálculos envolvendo um robô móvel com 6-GDL. A cinemática direta e inversa dos robôs possibilita ver movimentos de rotação, e entender as equações elaboradas por Denavit-Hartenberg. Com o método de D-H é possível relacionar o sistema de coordenadas ao ponto das extremidades e oferecer um total controle entre a posição e a orientação.

O estudo da modelagem matemática do SAEED B. NIKU mostra como o sistema de coordenadas é necessário na base de D-H, onde se veem os parâmetros e também as articulações.

Futuramente as equações aqui estudadas serão aplicadas na construção de um protótipo robótico com seis graus de liberdade acoplado a uma base robótica móvel, que será finalizado em março. Compreender e detalhar o processo de desenvolvimento, construção e programação de robôs de 6-GDL a fim de estabelecer noções concretas sobre seu funcionamento nas suas aplicações industriais são os resultados finais.

## REFERÊNCIAS

- [1] NIKU, S. B. *Introdução à Robótica: Análise, Controle e Aplicações*. 2ª Edição. Editora LTC, 2013.
- [2] DENAVIT, J. *Description and displacement analysis of mechanics based on the 2x2 dual matrices*. Evanston University of Northwstem. 1ª Edição. 1955.
- [3] BARCELOS, Sergio Renato. *Software "Modellus" e modelagem matemática: relacionando conceitos matemáticos com fenômenos de física*. 2017.
- [4] MENDES, Iran Abreu. *Matemática e investigação em sala de aula*. Editora Livraria da Física, 2009.
- [5] MARTINEZ SILVA, Javier. *Modelagem e análise de conhecimento para planejamento automático: uma abordagem baseada em GORE e redes de Petri*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 2016
- [6] SANTOS, Vítor MF. *Robótica Industrial*. Universidade de Aveito-Departamento de Engenharia Mecânica, 2004.
- [7] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea*. Bookman Editora, 2006.
- [8] FILIPPO, Thais Raquel Martins. *Uma contribuição da automação para o desenvolvimento de órteses ativas para membros inferiores*. Ed al. 2006