



ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO ALGORITMO DE SEEDHER APLICADO À ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DE UM MODELO DE SOLO ESTRATIFICADO EM DUAS CAMADAS PARA ATERRAMENTOS ELÉTRICOS

Raphael Batista*¹, Marcos Roberto de Araújo^{1,2}, Geraldo Rodrigues Silveira Neto¹ e Pablo Rangel Abreu Andrade¹

¹UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

²UNIFEI – Universidade Federal de Itajubá

Resumo - Este trabalho apresenta uma análise de sensibilidade paramétrica do algoritmo de Seedher aplicado à estimação de parâmetros relacionados a um modelo de solo estratificado em duas camadas. A partir das formulações possíveis para o cálculo da resistividade da primeira e segunda camada do solo, utilizam-se valores de medições compatíveis com os encontrados na prática pelo método de Frank Wenner. Em sequência, os resultados considerados esperados são comparados com os oriundos da simulação. Os resultados sugerem que um passo com valor fixo nas simulações implica convergência para um pequeno grupo de configurações de solo. Há divergência dos resultados para casos em que o solo é homogêneo e em que há grande diferença nos valores de resistividades entre as camadas do solo.

Palavras-Chave - Aterramento elétrico, Método de Frank Wenner, Otimização, Resistividade do solo.

SENSIBILITY ANALYSIS OF SEEDHER'S ALGORITHM APPLIED TO THE PARAMETER ESTIMATION OF A TWO-LAYER SOIL MODEL FOR GROUNDING

Abstract - This work shows a parameter sensibility analysis of Seedher's algorithm applied to the parameters estimation related to a two-layer soil model. From the possible formulations for the resistivity of first and second layers, values similar to real measurements with the Frank Wenner method are used. In sequence, the expected results are compared with the simulations. The results suggest that the step with a constant value throughout the simulations converges only to small group of configuration soils. The results differ for the cases in which the soil has a homogeneous characteristic or when there is a considerable variance between the resistivity values of the layers.

Keywords - Frank Wenner Method, Grounding, Optimization, Soil resistivity.

INTRODUÇÃO

O desempenho de sistemas elétricos de potência, de forma geral, é diretamente relacionado aos seus aterramentos elétricos. As consequências de fenômenos como a incidência direta ou indireta de descargas atmosféricas em linhas de transmissão podem ser atenuadas com um projeto adequado de aterramento elétrico que leve em conta suas influências nos pontos de maior vulnerabilidade do sistema. Para fenômenos lentos, como curtos-circuitos à frequência do regime da rede, pode-se simplificar o aterramento por uma resistência, enquanto para fenômenos rápidos, como descargas atmosféricas, os efeitos de propagação da onda de corrente e a característica do solo frente a estes surtos impõem um comportamento de impedância [1].

Outro ponto de importância dos aterramentos elétricos é a proteção de equipamentos e a segurança de seres vivos. O aterramento fornece um caminho para o solo de cargas induzidas em carcaças metálicas e minimiza possíveis acidentes causados por choques elétricos devido a partes energizadas de equipamentos, seja por problemas de isolamento ou outro motivo [1].

O projeto de malhas para aterramentos elétricos depende de rotinas computacionais, as quais utilizam dados do solo avaliado, como sua resistividade. De posse das características finais necessárias para o projeto, realizam-se simulações e define-se a malha mais adequada. A medição posterior da resistência elétrica da malha implantada pode ser realizada pelo método da queda de potencial, como sugerido em [1]. Como as informações de resistividade do solo são fundamentais para o início do projeto do aterramento, sua determinação requer o uso de uma técnica de medição, sendo que a mais utilizada para é a de Frank Wenner, desenvolvido em [2].

A aplicação do método de Frank Wenner consiste na utilização de quatro hastes metálicas idênticas. Como ilustrado na Figura 1, as hastes são enterradas no solo até uma profundidade b e espaçadas uniformemente de uma distância a . Injeta-se uma corrente nas hastes 1 e 4, o que resulta em

*raphaelbatista@ufmg.br

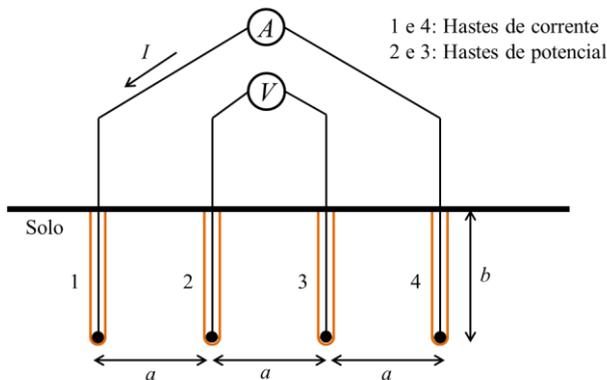
uma elevação do potencial no solo ao seu redor. As hastas 2 e 3 são utilizadas para medir a diferença de potencial devido à circulação de corrente no solo e a resistência medida é dada por:

$$R = \frac{V}{I} \quad (1)$$

Onde:

- R - Resistência medida.
- V - Diferença de potencial medida entre as hastas 2 e 3.
- I - Corrente medida entre as hastas 1 e 4.

Figura 1: Disposição de hastas para o método de Frank Wenner – adaptado de [1].



O valor de resistência calculada a partir da diferença de potencial e da injeção de corrente é proporcional à resistividade elétrica medida. Tal relação, segundo [2], é descrita por:

$$\rho = KR, K = \frac{4\pi a}{1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} - \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}}} \quad (2)$$

Onde:

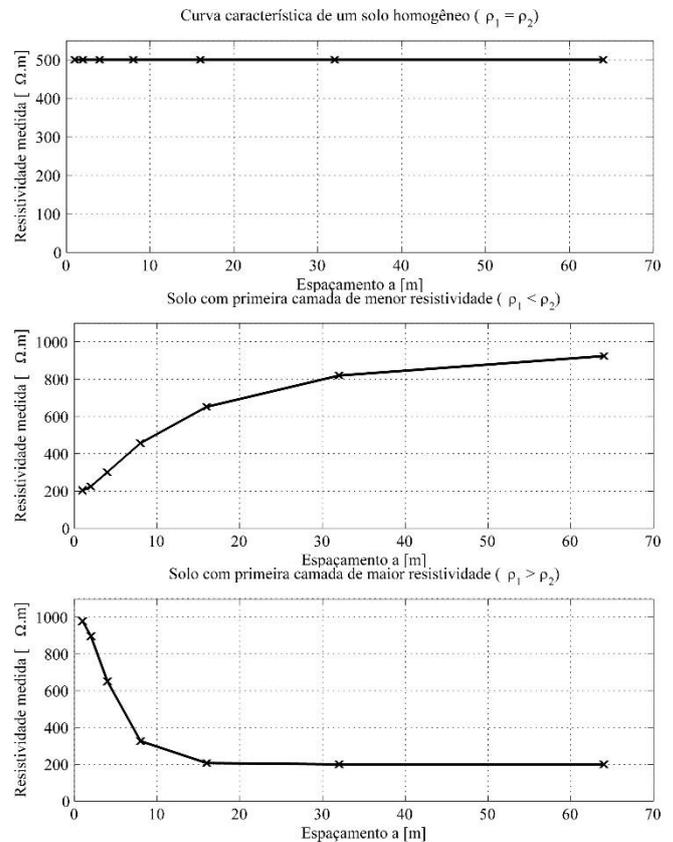
- ρ - Resistividade elétrica medida ou aparente para a distância a entre as hastas.
- K - Constante que relaciona proporcionalmente ρ e R .

Tal formulação é válida para distâncias iguais entre as hastas e para quando o diâmetro destas é bem menor que os espaçamentos de valor a – de forma prática, 10 vezes menor [1].

A Equação (2) permite a obtenção de um conjunto de resistividades em função de diferentes distâncias de medição entre as hastas. A sequência de distâncias entre as hastas mais usual é de 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64 m, embora na prática seja comum observar sequências de 2, 4, 8, 16 e 32 m [1]. O resultado final das medições de resistividade versus distância reproduz curvas com características bem definidas, como ilustrado na Figura 2. Percebe-se desta que a resistividade não varia com a mudança de espaçamento entre as hastas para o caso de um solo homogêneo, ou seja, em que a resistividade da primeira camada, ρ_1 , é igual à da segunda, ρ_2 . Para o caso em que $\rho_1 < \rho_2$, percebe-se que menores espaçamentos implicam valores menores de resistividade, enquanto maiores valores de a resultam em maiores resistividades medidas. O contrário, $\rho_1 > \rho_2$, ocorre para o caso em que a primeira camada do solo possui maior valor de resistividade, isto é, valores

maiores são medidos para espaçamentos pequenos, enquanto menores valores são obtidos para maiores distâncias.

Figura 2: Disposição de hastas para o método de Frank Wenner – adaptado de [1].



As observações acima já consideram a aproximação das medições de resistividade por um modelo de solo com duas camadas, o mais usual na prática. Os dados obtidos nas medições devem ser processados por um método numérico de forma a aproximá-lo do modelo de duas camadas do solo, o que é apresentado no item seguinte deste trabalho.

I. EQUAÇÕES FINITAS DE RESISTIVIDADE PARA UM MODELO DE SOLO COM DUAS CAMADAS

A. Equações finitas para a resistividade aparente quando $\rho_1 < \rho_2$

O potencial em um ponto P localizado a uma distância horizontal a de uma fonte puntiforme de corrente S, para o caso em que P e S estão na superfície do solo, é dado por [3]:

$$V_p = \frac{I\rho_1}{2\pi a} \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} \right], k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (3)$$

Onde:

- V_p - Potencial elétrico no ponto P.
- h - Profundidade da primeira camada do solo.
- n - Número de imagens consideradas para o cálculo.
- k - Coeficiente de reflexão da onda de tensão.

A Equação (3) deve ser modificada para ser finita, pois a série infinita presente em seu cálculo impede tal característica. O potencial V_p deve ser dividido em dois [4]:

$$V_p = V_e + V_r \quad (4)$$

Onde:

- V_r - Engloba os termos da série de $n = 2$ a infinito.
- V_e - Termos da Equação (3) não incluídos em V_r .

Uma fórmula empírica para V_r é dada por [5]:

$$V_r = V_b I \sqrt{\frac{c}{c + \left(\frac{a}{h}\right)^\beta}}, \quad V_b = \rho_l \frac{-k - \ln(1-k)}{2\pi h}, \quad (5)$$

$$c = x_1 \left[\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \right]^{x_3}, \quad \beta = 2 - x_2 \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Faz-se a suposição de valores reais para V_r computados a partir da Equação (3) com um erro de truncamento inferior a 0,1%. Assim, a fim de se aproximar a Equação (5) pela (3), formula-se uma função objetivo igual à soma dos quadrados das diferenças entre seus valores. O valor ótimo é obtido pela minimização da função objetivo, a qual é resolvida pelo algoritmo multiplicador apresentado em [6]. Os valores das constantes x_1 , x_2 e x_3 são iguais, respectivamente, a 16,4133, 0,136074 e 0,393468 [4]. Calcula-se, portanto, uma equação finita para a resistividade aparente ρ_a para o caso em que ρ_1 é menor que ρ_2 :

$$\rho_a = \rho_l + 4a\rho_l k \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 4h^2}} \right) + 4a\pi V_b \left(\sqrt{\frac{c}{c + (a/h)^\beta}} - \sqrt{\frac{c}{c + (2a/h)^\beta}} \right) \quad (6)$$

B. Equações finitas para a resistividade aparente quando $\rho_1 > \rho_2$

O potencial V_p , neste caso, é do tipo [4]:

$$V_p = I \frac{\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) e^{-a \cdot b(a)}}{2\pi a},$$

$$b(a) = \frac{b_m - (b_m - x_1) e^{-x_2 \frac{a}{h}}}{h}, \quad (7)$$

$$b_m = x_3 - x_4 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{x_5}$$

Ao se repetir o raciocínio do apresentado na seção anterior, calculam-se x_1 , x_2 , x_3 , x_4 e x_5 como iguais a, respectivamente, 0,673191, 0,479513, 1,33335, 0,882645 e 0,697106. Por fim, a equação finita resultante para a resistividade aparente ρ_a para o caso em que ρ_1 é maior que ρ_2 é dada por:

$$\rho_a = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \left[2 \cdot e^{-a \cdot b(a)} - e^{-2a \cdot b(2a)} \right] \quad (8)$$

C. Cálculo dos parâmetros das equações finitas de resistividade para o modelo de solo com duas camadas

As Equações (6) e (8) podem ter seus parâmetros estimados por meio de um processo iterativo baseado nos mínimos quadrados [4]. Assim, a função a ser minimizada é formulada como:

$$f(\rho_1, \rho_2, h) = \sum_{j=1}^u \left[\frac{\rho'_j - \rho_j(\rho_1, \rho_2, h)}{\rho'_j} \right]^2 \quad (9)$$

Onde:

- u - Número de medições realizadas.
- ρ'_j - Resistividade aparente medida para o j -ésimo espaçamento.
- ρ_j - Resistividade aparente estimada para o j -ésimo espaçamento ao se utilizar a Equação (6) ou (8), dependendo se a camada superior possui menor ou maior resistividade.

O algoritmo sugerido em [4] para a minimização da Equação (9) é descrito a seguir. Destaca-se que as grandezas da Equação (9) têm sua taxa de convergência aumentada quando substituídas por seus logaritmos neperianos. Ademais, a convergência é assegurada se os parâmetros não variarem mais que 50% em cada iteração do algoritmo. Tem-se, portanto, a função objetivo F dada por:

$$F = \sum_{j=1}^u \left[\frac{m_j - c_j}{m_j} \right]^2, \quad m_j = \ln(\rho'_j), \quad (10)$$

$$c_j = \ln(\rho_j(\rho_1, \rho_2, h))$$

Selecionam-se os valores iniciais de ρ_1 , ρ_2 e h , além da equação para o cálculo da resistividade aparente. São recomendados os valores correspondentes ao mínimo e máximo espaçamento, respectivamente, para ρ_1^0 e ρ_2^0 , e um valor unitário para h^0 . Define-se o contador de iterações y como nulo para a situação anterior. Para ρ_1^y , ρ_2^y e h^y , o vetor atualizado dos parâmetros do solo é dado por:

$$x^{y+1} = x^y + \lambda \left(B^T W B \right)^{-1} B^T W D,$$

$$x^y = \left[\rho_1^y; \rho_2^y; h^y \right], \quad (11)$$

$$D = \begin{bmatrix} m_1 - c_1 \\ \vdots \\ m_u - c_u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial \rho_1} & \frac{\partial c_1}{\partial \rho_2} & \frac{\partial c_1}{\partial h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial c_u}{\partial \rho_1} & \frac{\partial c_u}{\partial \rho_2} & \frac{\partial c_u}{\partial h} \end{bmatrix}$$

Onde:

- λ - Valor escalar escolhido de forma que os parâmetros não sejam alterados por mais de 50% a cada iteração.
- W - Matriz do tipo:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_u^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

O uso de um valor fixo e não variável para λ a cada iteração não é avaliado na literatura convencional, por isso, a análise do desempenho do algoritmo para diferentes medições de resistividade é de interesse deste trabalho. A viabilidade do uso de um λ constante aumenta a facilidade da implementação do algoritmo, além de permitir uma comparação mais fiel entre lógicas, já que o cálculo de λ é particular do autor e não é apresentado em grande parte da literatura convencional. Vale ressaltar que o uso de um λ fixo pode acarretar um número maior de iterações para se atingir a convergência.

II. RESULTADOS

Para a análise da constante λ apresentada na Equação (11), utilizaram-se diferentes configurações para os modelos de solo com duas camadas, cujas resistividades aparentes são ditas esperadas por terem sido obtidas pela substituição direta de valores nas Equações (6) ou (8). Assim, as resistividades estimadas pelo algoritmo podem ser comparadas com seus valores esperados obtidos diretamente da Equação (11). Tal prática permite avaliar a precisão do algoritmo implementado em relação à da formulação original.

A Tabela I apresenta as diferentes configurações de solos utilizadas neste trabalho, numeradas de 1 a 27, sendo que cada caso é dividido em três espaçamentos: i) 2, 4, 8, 16 e 32, ii) 2, 8 e 32 e iii) 2, 16 e 32 m. Assim, denota-se por caso 1i o referente ao espaçamento de 2, 4, 8, 16 e 32 m para um solo com $\rho_1 = 30 \Omega\text{m}$, $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ e $h = 2$ m. Os solos utilizados têm o objetivo de representar de forma concisa as diferentes possibilidades de medição presentes na prática.

Tabela I: Configuração dos solos utilizados nas simulações

n°	ρ_1 (Ωm)	ρ_2 (Ωm)	h (m)	n°	ρ_1 (Ωm)	ρ_2 (Ωm)	h (m)
1	30	500	2	15	10^4	500	10
2	30	500	5	16	500	30	2
3	30	500	10	17	500	30	5
4	100	500	2	18	500	30	10
5	100	500	5	19	500	100	2
6	100	500	10	20	500	100	5
7	500	500	2	21	500	100	10
8	500	500	5	22	500	2500	2
9	500	500	10	23	500	2500	5
10	2500	500	2	24	500	2500	10
11	2500	500	5	25	500	10^4	2
12	2500	500	10	26	500	10^4	5
13	10^4	500	2	27	500	10^4	10
14	10^4	500	5				

Para as simulações, variou-se o valor de λ de 0,1 a 50 em incrementos de 0,01 para cada caso e utilizou-se como valores iniciais para ρ_1^0 e ρ_2^0 os correspondentes à resistividade aparente no mínimo e máximo espaçamento, além de um h^0 unitário. Ressalta-se que os resultados simulados são

comparados aos esperados pela norma L^2 de erro, de forma similar a [7] e representada por EL^2 , dada por:

$$EL^2 = \frac{\sqrt{\iint_{\Gamma} |m_j - c_j|^2 d\Gamma}}{\sqrt{\iint_{\Gamma} |c_j|^2 d\Gamma}} \quad (13)$$

Os resultados apresentados nas Figuras 3 e 4 com as normas L^2 de erro são para o caso em que, mesmo com a não convergência do algoritmo, tem-se um EL^2 menor que 30%. Destaca-se que as resistividades estimadas pelo algoritmo tidas como precisas possuem um valor de EL^2 menor que 5%. Não houve qualquer convergência com EL^2 menor que 30% para os casos 7i, 8i, 9i, 7ii, 8ii, 9ii, 15ii, 17ii, 18ii, 21ii, 2iii, 7iii, 8iii, 9iii, 11iii, 12iii, 14iii, 15iii, 16iii, 17iii, 18iii, 20iii, 21iii e 27iii. Percebe-se a incapacidade do algoritmo proposto para casos de solo homogêneo e, principalmente, para casos em que são feitas poucas medições, como os com espaçamentos ii e iii. Casos em que há uma maior discrepância entre os valores de ρ_1 e ρ_2 tendem a ter menor convergência com o uso do λ fixo.

Para os itens (a) e (c) da Figura 3, uma faixa de 10 a 30 para λ garante bons resultados de estimação dos parâmetros, enquanto no item (b) o mesmo ocorre para uma variação de 0,8 a 7,5. Para os casos de medições realizadas com poucos espaçamentos, casos dos itens (d), (e) e (f) da Figura 3 e (a) e (b) da Figura 4, há uma variação brusca de EL^2 que dificulta a detecção de faixas para λ admissíveis, ou seja, que possam indicar boas aproximações para os itens apresentados.

III. CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho indicam que o uso de um valor fixo para λ não garante boas aproximações dos parâmetros para um modelo de solo com duas camadas. Embora alguns casos impliquem estimativas consistentes, nos casos em que as camadas do solo possuem uma grande divergência de resistividade elétrica entre elas, há uma tendência de as simulações divergirem para medições com poucos espaçamentos, além da inexistência de um valor específico de λ que garanta aproximações razoáveis para todos os casos ao mesmo tempo. Ademais, solos homogêneos não são capazes de serem estimados para a faixa de valores avaliada neste trabalho.

Destaca-se que o comportamento do algoritmo, apesar das oscilações apresentadas, evidencia uma característica que deve ser evitada em qualquer medição de resistividade do solo: o uso de medições com poucos espaçamentos. Uma boa representação do solo depende de um número mínimo de medições efetuadas a fim de minimizar conclusões falsas sobre o terreno. Tal prática é fundamental para que o projeto de aterramento atenda as expectativas iniciais de sua implantação.

Figura 3: a. Valores de normal EL^2 obtidos para a variação de λ para os casos de 1i a 11i, b. 12i a 19i e c. 20i a 27i, d. de 1i a 10i, e. 11i a 20i e f. 21ii a 27ii.

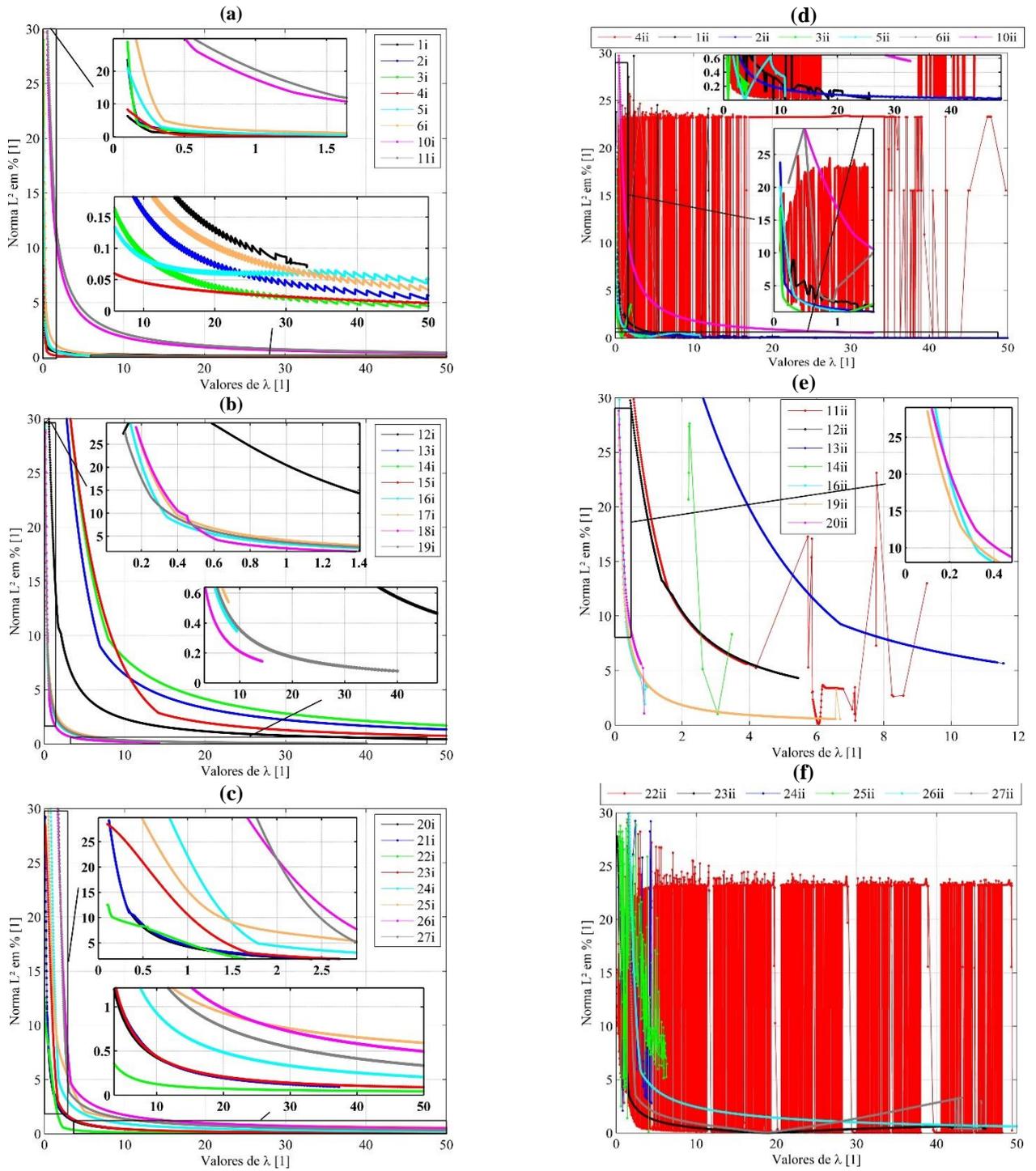
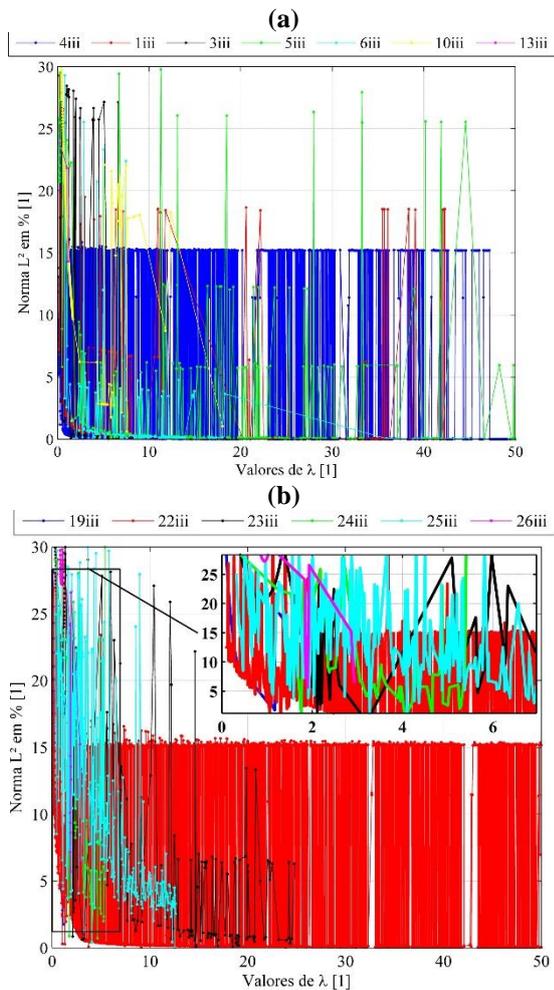


Figura 4: a. Valores de norma EL^2 obtidos para a variação de λ para os casos de 1iii a 13iii e b. 14iii a 27iii.



REFERÊNCIAS

- [1] S. Visacro, *Aterramentos elétricos: uma abordagem de engenharia*, ArtLiber Editora, 1ª Edição, São Paulo, 2002.
- [2] F. Wenner, "A method for measuring earth resistivity", *U.S. Bureau of Standards Notes*, vol. 12, pp. 373-375, 1916.
- [3] E. D. Sunde, *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*, Dover Publications, 1st Edition, New York, 1968.
- [4] H. R. Seedher, J. K. Arora, "Estimation of two layer soil parameters using finite Wenner resistivity expressions", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 7, no. 3, pp. 1213-1217, 1992.
- [5] H. R. Seedher, J. K. Arora, B. Thapar, "Finite expressions for computation of potential in two layer soil", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. PWRD-2, no. 4, pp. 1098-1102, 1987.
- [6] D. A. Pierre, M. J. Lowe, *Mathematical Programming via Augmented Lagrangians*, Addison-Wesley Publishing Company, 1st Edition, Massachusetts, 1975.
- [7] R. B. B. Louro, U. C. Resende, M. M. Afonso, and E. H. R. Coppoli, "Analysis of Polynomial Base Influence in EFG Interpolating Moving Least Square Method Applied to 2D Electromagnetic Scattering", in *20th International*